1. Contesta los siguientes apartados:
   a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(3,-1)$ y $Q(-1,4)$. ¿Qué ángulo forma esta recta con el eje X ?
   b) **[1 punto]** Hallar la ecuación explícita de la recta s perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=3-5\lambda \end{cases}$ que pasa por el punto $R(-1,-1)$. ¿Cuál es la distancia del punto R a la recta r ?
   c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta t perpendicular a la recta r del apartado b) que pasa por el punto $Q(-2,1)$.

2. Dadas las rectas $r \equiv 2x-y-4=0$ y $s \equiv x+2y-7=0$, se pide:
   a) **[0,5 puntos]** Demuestra que las rectas anteriores son perpendiculares.
   b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte P de r y s.
   c) **[1 punto]** De entre las rectas del haz, hallar la ecuación general de la que forma un ángulo de 45° con la recta $x+y+1=0$.
   d) **[1 punto]** Dada la recta $t \equiv -2x+y+1=0$, calcula la distancia de t a r.

3. **[1 punto]** La recta $\begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1-k\lambda \end{cases}$ es paralela a la recta $y=3x-\dfrac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de k?

4. Dadas las rectas $r \equiv x=3$, $s \equiv x-2y+5=0$ y $t \equiv 2x+y=0$ hallar:
   a) **[1 punto]** Demostrar que el triángulo formado por las rectas r, s y t es rectángulo.
   b) **[1 punto]** Hallar los vértices del triángulo anterior.
   c) **[1 punto]** Calcular el área del triángulo.

Soluciones

1. Contesta los siguientes apartados:

a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(3,-1)$ y $Q(-1,4)$. ¿Qué ángulo forma esta recta con el eje X ?

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{PQ}=(-4,5)$. Por tanto, la ecuación continua de la recta es $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{5}$.

Pasando a general: $5x-15=-4y-4 \Rightarrow 5x+4y-11=0$.

La pendiente de la recta anterior es $m=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$. Sabemos que la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X. Entonces $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{4} \Rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{4}\right)=-51,34^{\circ}$. Como el ángulo ha de ser positivo y la recta es decreciente (la pendiente es negativa), tenemos que $\alpha=180-51,34 \Rightarrow \alpha=128,66^{\circ}$.

b) **[1 punto]** Hallar la ecuación explícita de la recta s perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=3-5\lambda \end{cases}$ que pasa por el punto $R(-1,-1)$. ¿Cuál es la distancia del punto R a la recta r ?

Un vector director de r es $\vec{u}=(2,-5)$. Por tanto, un vector perpendicular a $\vec{u}$ será $\vec{v}=(5,2)$. De este modo, la recta s perpendicular a r que pasa por el punto $R(-1,-1)$ será $\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{2}$. Pasando a explícita: $2x+2=5y+5 \Rightarrow 2x-5y-3=0 \Rightarrow s \equiv y=\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}$.

Hallemos la ecuación general de la recta r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-5} \Rightarrow -5x-5=2y-6 \Rightarrow r \equiv -5x-2y+1=0$.

La distancia del punto $R(-1,-1)$ a la recta r es $d(R,r)=\frac{|(-5)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+1|}{\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}}=\frac{|5+2+1|}{\sqrt{29}}=\frac{8}{\sqrt{29}}$.

c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta t perpendicular a la recta r del apartado b) que pasa por el punto $Q(-2,1)$.

Como tanto s como t son perpendiculares a r, s y t han de ser paralelas. Esto quiere decir que la recta t debe ser de la forma $2x-5y+C=0$. Y como ha de pasar por el punto $Q(-2,1)$: $2\cdot(-2)-5\cdot 1+C=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -4-5+C=0 \Rightarrow C=9$. Por tanto $t \equiv 2x-5y+9=0$.

2. Dadas las rectas $r \equiv 2x-y-4=0$ y $s \equiv x+2y-7=0$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Demuestra que las rectas anteriores son perpendiculares.

Un vector director de r es $\vec{u}=(1,2)$, y un vector director de s es $\vec{v}=(-2,1)$. Estos dos vectores son perpendiculares ya que su producto escalar es igual a cero: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,2)\cdot(-2,1)=1\cdot(-2)+2\cdot 1=-2+2=0$. Por tanto, también son perpendiculares la recta r y s.

b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte P de r y s.

Resolvamos el sistema formado por las rectas r y s: $\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases}$. Multiplicando ambas por 2 tenemos:

$\begin{cases} 4x-2y-8=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $5x-15=0 \Rightarrow x=3$. Y sustituyendo en la segunda ecuación: $3+2y-7=0 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$. Por tanto, el punto de corte de ambas rectas es $P(3,2)$.

De este modo, el haz de rectas de centro el punto P es $\lambda(x-3)+\mu(y-2)=0$, o bien $y-2=m(x-3)$.

c) **[1 punto]** De entre las rectas del haz, hallar la ecuación general de la que forma un ángulo de 45° con la recta $x+y+1=0$.

Si tomamos como ecuación del haz $y-2=m(x-3)$, la recta que buscamos tiene pendiente m. La forma explícita de la recta $x+y+1=0$ es $y=-x-1$, cuya pendiente es igual a -1. Por tanto:

$$\text{tg}\, 45^{\circ}=\left|\frac{m-1}{1-m\cdot(-1)}\right| \Rightarrow 1=\left|\frac{m-1}{1+m}\right| \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m-1}{1+m}=1 \Rightarrow m-1=1+m \ \text{(no tiene solución)} \\ \dfrac{m-1}{1+m}=-1 \Rightarrow m-1=-1-m \Rightarrow m=0 \end{cases}.$$

Para $m=0$, la recta buscada es $y-2=0(x-3) \Rightarrow y-2=0$. Por tanto, también valdría la recta $x-3=0$.

d) **[1 punto]** Dada la recta $t \equiv -2x+y+1=0$, calcula la distancia de t a r.

Como $r \equiv 2x-y-4=0$, claramente r y $t \equiv -2x+y+1=0$ son paralelas: $\dfrac{2}{-2}=\dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{-4}{1}$. Un punto de t es, por ejemplo, $A(0,-1)$. Por tanto $d(r,t)=d(A,r)=\dfrac{|2\cdot 0+(-1)\cdot(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

3. **[1 punto]** La recta $\begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1-k\lambda \end{cases}$ es paralela a la recta $y=3x-\dfrac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de k?

Pasemos ambas rectas a forma general:

$\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-k} \Rightarrow -kx-2k=3y-3 \Rightarrow -kx-3y-2k+3=0$.

$y=3x-\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2y=6x-1 \Rightarrow -6x+2y+1=0$.

Para que sean paralelas: $\dfrac{-k}{-6}=\dfrac{-3}{2} \Rightarrow -2k=18 \Rightarrow k=-9$.

4. Dadas las rectas $r \equiv x=3$, $s \equiv x-2y+5=0$ y $t \equiv 2x+y=0$ hallar:

a) **[1 punto]** Demostrar que el triángulo formado por las rectas r, s y t es rectángulo.
Basta demostrar que dos de las tres rectas son perpendiculares. En este caso lo son s y t ya que un vector director de s es $\vec{u}=(2,1)$ y un vector director de t es $\vec{v}=(-1,2)$. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, entonces $\vec{u}\perp\vec{v}$ y también $s\perp t$.

b) **[1 punto]** Hallar los vértices del triángulo anterior.
Llamemos $A=r\cap s$, $B=r\cap t$ y $C=s\cap t$.

Claramente $A(3,4)$ y $B(3,-6)$. Para hallar C se resuelve el sistema $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$, cuyas soluciones son $x=-1$, $y=2$. Por tanto, $C(-1,2)$.

c) **[1 punto]** Calcular el área del triángulo.

Lo haremos de dos maneras.

1) Tomando como base $b = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ y como altura $h = d\left(C, r\right)$.

$$b = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(0,-10)\right| = \sqrt{0^2 + (-10)^2} = \sqrt{0+100} = \sqrt{100} = 10;$$

$$h = d\left(C, r\right) = \frac{\left|1\cdot(-1) + 0\cdot 2 + (-3)\right|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{\left|-1-3\right|}{\sqrt{1}} = \frac{\left|-4\right|}{1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Entonces el área del triángulo es $A = \dfrac{b\cdot h}{2} = \dfrac{10\cdot 4}{2} = 20$ uds².

2) Como las rectas s y t son perpendiculares, los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos del triángulo rectángulo, con lo que ambos pueden hacer tanto de base como de altura. De este modo, el área del triángulo es

$$A = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2} = \frac{\left|(-4,-2)\right|\cdot\left|(-4,8)\right|}{2} = \frac{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{16+64}}{2} = \frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}}{2} = \frac{2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20 \text{ uds}^2.$$