1. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones.
   a) Hallar las ecuaciones continua y general de la recta que pasa por los puntos $A(2,-3)$ y $B(-4,1)$.
   b) Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2,4)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv -x+3y+5=0$.
   c) Halla el ángulo formado por las rectas $r \equiv y=-\frac{3}{2}x+1$ y $s \equiv -2x+y+3=0$.
2. **[1 punto]** Hallar la ecuación general de una recta s, paralela a $r \equiv 2x-y+1=0$, que se encuentre a una distancia de 2 unidades de esta última. ***Nota***: hay dos soluciones.
3. **[1 punto]** Calcula el valor de k para que la recta $x+y=k$ forme con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área sea de 8 uds^2. ***Nota***: hay dos soluciones.
4. **[1 punto]** Hallar la ecuación de una recta r que forme con el eje X un ángulo de 30° y cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a 3 unidades. ***Pista***: $\operatorname{tg} 30^{\circ} = \sqrt{3}/3$. ***Nota***: hay dos soluciones.
5. **[2 puntos]** Un triángulo isósceles ABC tiene por lado desigual el segmento que une los puntos $A(-1,7)$ y $B(5,3)$. El vértice C está situado sobre la recta $2x+y-16=0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.
6. **[1 punto]** Hallar el dominio de las siguientes funciones.
   a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-10}$
   b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$
7. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos. Basándote en la gráfica, estudia la continuidad de la misma.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ \dfrac{-2x}{-x+4} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Soluciones

1. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones.

   a) Hallar las ecuaciones continua y general de la recta que pasa por los puntos $A(2,-3)$ y $B(-4,1)$.

   Continua: $\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-(-3)}{1-(-3)} \Rightarrow \frac{x-2}{-6}=\frac{y+3}{4}$.

   General: $4(x-2)=-6(y+3) \Rightarrow 4x-8=-6y-18 \Rightarrow 4x+6y+10=0 \Rightarrow 2x+3y+5=0$.

   b) Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2,4)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv -x+3y+5=0$.

   Un vector perpendicular a la recta r es $\vec{v}=(-1,3)$. Por tanto, la recta que se pide es

   $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{3} \Rightarrow 3(x-2)=-1(y-4) \Rightarrow 3x-6=-y+4 \Rightarrow 3x+y-10=0$.

   c) Halla el ángulo formado por las rectas $r \equiv y=-\frac{3}{2}x+1$ y $s \equiv -2x+y+3=0$.

   Llamemos α al ángulo que forman r y s. La ecuación general de la recta r es $r \equiv 3x+2y-2=0$. Un vector director de r es $\vec{u}=(-2,3)$. Y un vector director de s es $\vec{v}=(-1,-2)$. Por tanto:

   $$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|(-2)(-1)+3(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|2-6|}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\frac{|-4|}{\sqrt{65}}=\frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha=\arccos\frac{4}{\sqrt{65}}=60,26^{\circ}.$$

2. **[1 punto]** Hallar la ecuación general de una recta s, paralela a $r \equiv 2x-y+1=0$, que se encuentre a una distancia de 2 unidades de esta última. ***Nota***: hay dos soluciones.
   La ecuación general de la recta s, por ser paralela a r, debe ser de la forma $s \equiv 2x-y+C=0$. La distancia de r a s coincidirá con la distancia de un punto cualquiera de r a s. Un punto de r es, por ejemplo, $P(0,1)$. Así:

   $$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|2\cdot 0+(-1)\cdot 1+C|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2 \Rightarrow \frac{|C-1|}{\sqrt{5}}=2 \Rightarrow |C-1|=2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} C-1=2\sqrt{5} \Rightarrow C=1+2\sqrt{5} \\ C-1=-2\sqrt{5} \Rightarrow C=1-2\sqrt{5} \end{cases}$$

   Por tanto, hay dos posibilidades para la recta s: $s \equiv 2x-y+1+2\sqrt{5}=0$, $s \equiv 2x-y+1-2\sqrt{5}=0$.

3. **[1 punto]** Calcula el valor de k para que la recta $x+y=k$ forme con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área sea de $8\ \text{uds}^2$. ***Nota***: hay dos soluciones.
   La recta corta al eje X en el punto $A(k,0)$ y al eje Y en el punto $B(0,k)$. Los vértices del triángulo serán entonces A, B y O, donde $O(0,0)$ es el origen de coordenadas. El triángulo entonces es rectángulo y su área será: $\frac{|k|\cdot|k|}{2}=\frac{k^2}{2}$. Por tanto, $\frac{k^2}{2}=8 \Rightarrow k^2=16 \Rightarrow k=\sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} k=-4 \\ k=4 \end{cases}$

4. **[1 punto]** Hallar la ecuación de una recta r que forme con el eje X un ángulo de 30° y cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a 3 unidades. ***Pista***: $\operatorname{tg} 30^{\circ}=\sqrt{3}/3$. ***Nota***: hay dos soluciones.
   Si m es la pendiente de la recta tenemos que $m=\operatorname{tg} 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{u_2}{u_1}$. Entonces la ecuación general de la recta r la podemos escribir así: $r \equiv \sqrt{3}x-3y+C=0$. Como la distancia al origen $O(0,0)$ es de 3 unidades tenemos:

   $$d(r,O)=\frac{|C|}{\sqrt{3+9}}=3 \Rightarrow |C|=3\sqrt{12}=6\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} C=6\sqrt{3} \\ C=-6\sqrt{3} \end{cases}$$. Por tanto: $$\begin{cases} r \equiv \sqrt{3}x-3y+6\sqrt{3}=0 \\ r \equiv \sqrt{3}x-3y-6\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

5. **[2 puntos]** Un triángulo isósceles ABC tiene por lado desigual el segmento que une los puntos $A(-1,7)$ y $B(5,3)$. El vértice C está situado sobre la recta $2x+y-16=0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.

Despejando y en la ecuación de la recta tenemos que $y=-2x+16$. Entonces, cualquier punto C de la recta se puede escribir así: $C(x,-2x+16)$. Puesto que el triángulo ABC es isósceles y el lado desigual es el lado AB, los lados iguales son AC y BC. Es decir, debe de darse la igualdad $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ son $\overrightarrow{AC}=(x+1,-2x+9)$ y $\overrightarrow{BC}=(x-5,-2x+13)$. Entonces tenemos:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(-2x+9)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(-2x+13)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1+4x^2-36x+81=x^2-10x+25+4x^2-52x+169 \Rightarrow -34x+82=-62x+194 \Rightarrow x=4$$

Por tanto, el vértice C es $C(4,-2\cdot 4+16) \Rightarrow C(4,8)$.

Si llamamos M al punto medio de A y B, el área del triángulo será igual a la base del triángulo $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, por la altura $\left|\overrightarrow{MC}\right|$, dividido entre dos. El punto medio de A y B es $M(2,5)$. Por tanto, el área del triángulo es:

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC}\right|}{2}=\frac{|(6,-4)|\cdot|(2,3)|}{2}=\frac{\sqrt{36+16}\cdot\sqrt{4+9}}{2}=\frac{\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}}{2}=\frac{\sqrt{13^2\cdot 2^2}}{2}=\frac{13\cdot 2}{2}=13\,\text{uds}^2$$

Otra forma de hallar el vértice C es obtener la recta perpendicular al lado AB que pasa por su punto medio M (altura correspondiente al lado AB):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{6} \Rightarrow 6x-12=4y-20 \Rightarrow 6x-4y+8=0 \Rightarrow 3x-2y+4=0$$

El vértice C será el corte de esta última recta y la recta que nos dan en el enunciado. Resolviendo el sistema:

$\begin{cases} 2x+y-16=0 \\ 3x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y-32=0 \\ 3x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow 7x-28=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=8$. Por tanto, $C(4,8)$.

6. **[1 punto]** Hallar el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-10}$

Igualamos el denominador a cero: $x^2-3x-10=0$. Las soluciones de la ecuación de segundo grado anterior son $x=-2$ y $x=5$. Por tanto: $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2\ ,\ 5\}$.

b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}$

El dominio serán todos los números reales que verifique la inecuación $\dfrac{x}{x+3}\geq 0$.

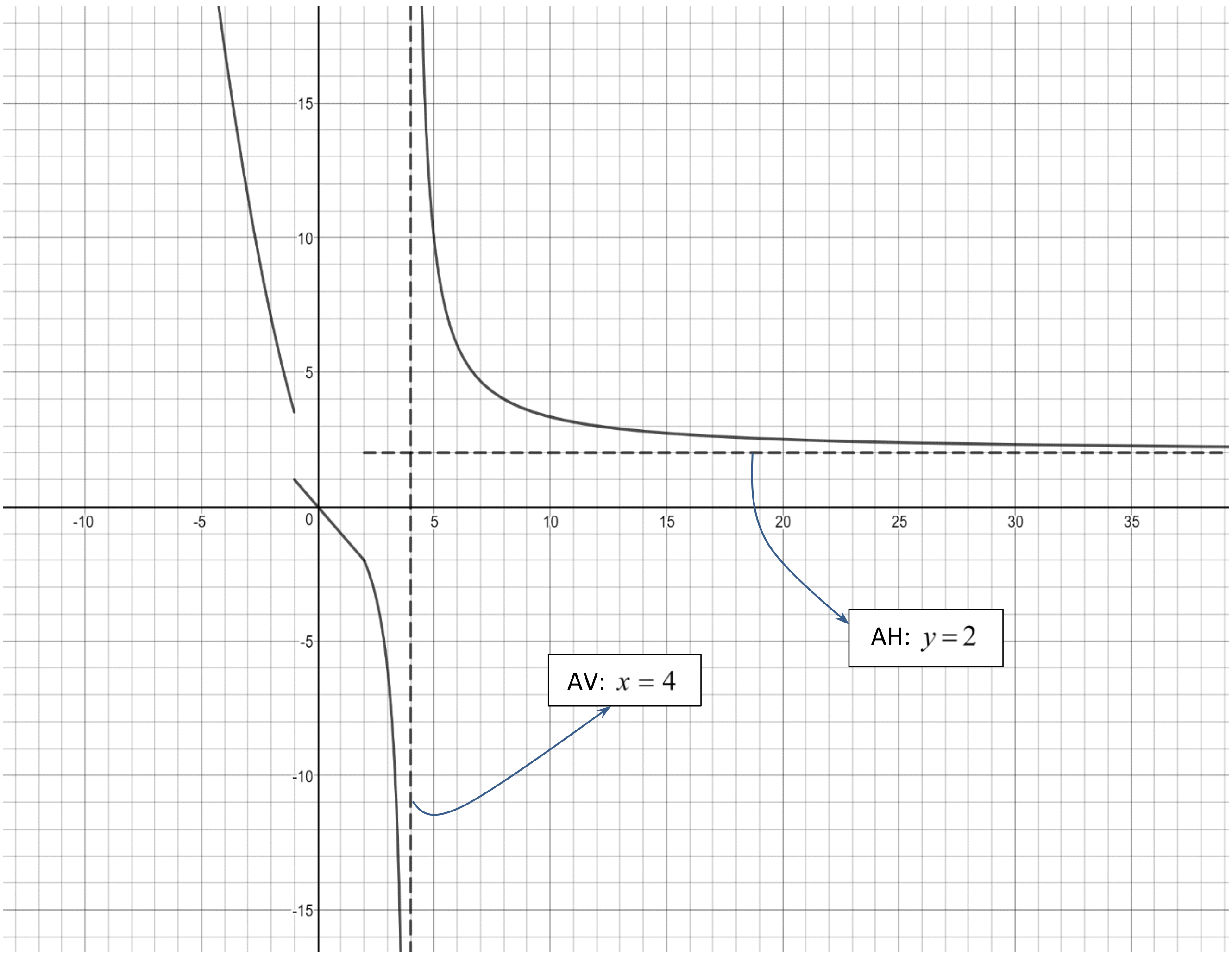
Como la raíz del polinomio x es 0 y la del polinomio $x+3$ es -3, podemos elaborar la siguiente tabla, con los correspondientes signos del cociente $\dfrac{x}{x+3}$ en cada uno de los intervalos:

$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,+\infty)$
+	**−**	**+**

El dominio de la función coincide con la solución de la inecuación: $\text{Dom } f=(-\infty,-3)\cup[0,+\infty)$.

7. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos. Basándote en la gráfica, estudia la continuidad de la misma.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-2x+1 & \text{si} \quad x<-1\\ -x & \text{si} \quad -1\le x<2\\ \dfrac{-2x}{-x+4} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$



La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en los puntos $x=-1$, en el que hay una discontinuidad de salto finito, y en el punto $x=4$, en el que hay una discontinuidad de salto infinito.