1. **[0,5 puntos]** Opera, simplifica y racionaliza la siguiente expresión con radicales: $\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}}$

2. **[0,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y escribe la solución en forma de intervalo: $\left|\dfrac{8x-12}{3}\right|\leq 1$

3. **[2 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

   a) $\sqrt{28+2x}=4+\sqrt{x}$; b) $\log 2+\log\left(x-3\right)=\dfrac{1}{2}\log\left(2x\right)$; c) $2^{x+1}+4^{x}=80$; d) $\dfrac{2x-1}{x+2}\geq 1$

4. **[1 punto]** Una parcela tiene forma triangular, dos de cuyos lados miden 46 y 56 metros. Si el ángulo que comprendido entre ellos es de 36º, encuentra la longitud del tercer lado y la medida de los otros dos ángulos del triángulo.

5. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\operatorname{sen} x+2\cos 2x=\dfrac{3}{2}$.

6. **[1 punto]** Calcula el valor de x para que el cociente $\dfrac{x-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$ sea un número complejo imaginario puro (es decir, un número complejo cuya parte real es cero).

7. Una recta r pasa por los puntos $A\left(1,2\right)$ y $B\left(4,-2\right)$.

   a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C\left(-2,3\right)$.

   b) **[0,5 puntos]** Hallar la distancia del punto C a la recta r.

8. **[1 punto]** Calcular, ***de manera razonada***, los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-x}$

9. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{x^2-x-2}$, se pide:

   a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

   b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.

   c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

Soluciones

1. **[0,5 puntos]** Opera, simplifica y racionaliza la siguiente expresión con radicales:

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-2-1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-3}{2+\sqrt{2}}=\frac{\left(2\sqrt{2}-3\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{4\sqrt{2}-4-6+3\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2}=$$

$$=\frac{7\sqrt{2}-10}{4-2}=\frac{7\sqrt{2}-10}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}-5.$$

2. **[0,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y escribe la solución en forma de intervalo:

$$\left|\frac{8x-12}{3}\right|\leq 1\Rightarrow -1\leq\frac{8x-12}{3}\leq 1\Rightarrow -3\leq 8x-12\leq 3\Rightarrow -3+12\leq 8x-12+12\leq 3+12\Rightarrow$$

$9\leq 8x\leq 15\Rightarrow\dfrac{9}{8}\leq x\leq\dfrac{15}{8}$. Por tanto, la solución es el intervalo $\left[\dfrac{9}{8},\,\dfrac{15}{8}\right]$.

3. **[2 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

a) $\sqrt{28+2x}=4+\sqrt{x}\Rightarrow 28+2x=16+8\sqrt{x}+x\Rightarrow 12+x=8\sqrt{x}\Rightarrow 144+24x+x^2=64x\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-40x+144=0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $x=36$ y $x=4$, las cuales se puede comprobar que son soluciones de la ecuación original.

b) $\log 2+\log(x-3)=\dfrac{1}{2}\log(2x)\Rightarrow\log\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{1}{2}\log(2x)\Rightarrow 2\log\dfrac{2}{x-3}=\log(2x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\log\left(\frac{2}{x-3}\right)^2=\log(2x)\Rightarrow\left(\frac{2}{x-3}\right)^2=2x\Rightarrow\frac{4}{x^2-6x+9}=2x\Rightarrow 2x^3-12x^2+18x-4=0.$$

Usando la regla de Ruffini: $2x^3-12x^2+18x-4=(x-2)\left(2x^2-8x+2\right)$. Por tanto, una solución de la ecuación es $x=2$. Las otras se obtienen de la resolución de la ecuación $2x^2-8x+2=0\Rightarrow x^2-4x+1=0$ cuyo discriminante es $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 1=16-4=12$. Entonces $x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$.

Por tanto, las otras dos soluciones son $x=2+\sqrt{3}$ y $x=2-\sqrt{3}$.

c) $2^{x+1}+4^x=80\Rightarrow 2^x\cdot 2+\left(2^x\right)^2=80$. Llamando $2^x=z$, la ecuación se convierte en $2z+z^2=80\Rightarrow$

$\Rightarrow z^2+2z-80=0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $z=-10$ y $z=8$. Entonces, si $z=-10\Rightarrow 2^x=-10$, que no tiene solución porque $2^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Si $z=8\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3$.

d) $\dfrac{2x-1}{x+2}\geq 1\Rightarrow\dfrac{2x-1}{x+2}-1\geq 0\Rightarrow\dfrac{2x-1-x-2}{x+2}\geq 0\Rightarrow\dfrac{x-3}{x+2}\geq 0$. La raíz del numerador es 3, y la del denominador -2. Elaboremos una tabla:

$(-\infty,\,-2)$	$(-2,\,3)$	$(3,\,+\infty)$
+	**−**	**+**

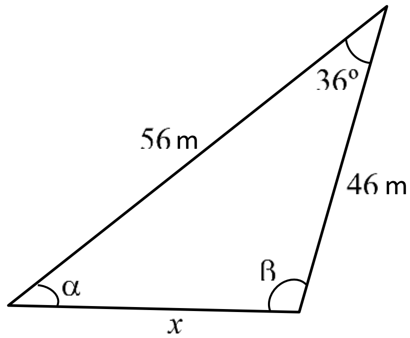
Por tanto, la solución es $(-\infty,\,-2)\cup(3,\,+\infty)$.

4. **[1 punto]** Una parcela tiene forma triangular, dos de cuyos lados miden 46 y 56 metros. Si el ángulo que comprendido entre ellos es de 36º, encuentra la longitud del tercer lado y la medida de los otros dos ángulos del triángulo.

El lado desconocido lo podemos hallar usado el teorema del coseno:

$x^2 = 46^2 + 56^2 - 2\cdot 46\cdot 56\cdot \cos 36^\circ \Rightarrow x^2 = 2116 + 3136 - 4168,06 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1083,94 \Rightarrow x = 32,92$ m.



Ahora, usando el teorema de los senos, podemos hallar el ángulo α

$$\frac{46}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{32,92}{\operatorname{sen}36^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{46\cdot\operatorname{sen}36^\circ}{32,92} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0,82 \Rightarrow \alpha = 55,22^\circ .$$

Como los tres ángulos suman 180°, tenemos:

$36^\circ + 55,22^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 36^\circ - 55,22^\circ \Rightarrow \beta = 88,78^\circ$.

5. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}x + 2\cos 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x + 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}x + 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{sen}x + 2 - 4\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\operatorname{sen}x + 4 - 8\operatorname{sen}^2 x = 3 \Rightarrow 8\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}x - 1 = 0$. Esta es una ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen}x$, cuyo discriminante es $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 8\cdot(-1) = 4 + 32 = 36$. Entonces:

$$\operatorname{sen}x = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 8} = \frac{2\pm 6}{16} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}x = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ \ , \ x = 150^\circ \\ \operatorname{sen}x = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 194,48 \ , \ x = 345,42^\circ \end{cases}$$

6. **[1 punto]** Calcula el valor de x para que el cociente $\frac{x-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$ sea un número complejo imaginario puro (es decir, un número complejo cuya parte real es cero).

Pasemos el número complejo a binómica:

$$\frac{x-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}-i} = \frac{\left(x-\sqrt{2}\,i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)}{\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)} = \frac{\sqrt{2}x + xi - 2i - \sqrt{2}i^2}{\sqrt{2}^2 - i^2} = \frac{\sqrt{2}x + xi - 2i - \sqrt{2}(-1)}{2-(-1)} = \frac{\sqrt{2}x + xi - 2i + \sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(x+1) + (x-2)i}{3} = \frac{\sqrt{2}(x+1)}{3} + \frac{x-2}{3}i \ .$$

Ahora igualamos la parte real a cero y resolvemos la ecuación:

$$\frac{\sqrt{2}(x+1)}{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{2}(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 .$$

7. **[1 punto]** Una recta r pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(4,-2)$.

   a) Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$.

   Un vector director de r es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3,-4)$. Por tanto, un vector perpendicular suyo será $\vec{n} = (4,3)$. De este modo, la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$ es $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{3}$. Pasando a general: $3x + 6 = 4y - 12 \Rightarrow s \equiv 3x - 4y + 18 = 0$.

b) Hallar la distancia del punto C a la recta r.

La ecuación general de la recta r es $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4} \Rightarrow -4x+4=3y-6 \Rightarrow 4x+3y-10=0$.

La distancia del punto C a la recta r es: $d(C,r)=\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot 3-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-8+9-10|}{\sqrt{25}}=\frac{9}{5}$ u.

8. **[1 punto]** Calcular, ***de manera razonada***, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\ \text{INDETERMINACIÓN}\right]=(*)$

Para resolver esta indeterminación hemos de factorizar el polinomio del numerador y el del denominador, usando como factor $x-2$.

Usando la regla de Ruffini se tiene que $x^4-4x+4=(x-2)(x-2)$. Y, por otro lado, tenemos que $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Entonces:

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{2-2}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+3}-x}=\left[\frac{1}{\infty-\infty}\ \text{INDETERMINACIÓN}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1\cdot\left(\sqrt{x+3}+x\right)}{\left(\sqrt{x+3}-x\right)\left(\sqrt{x+3}+x\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}+x}{\sqrt{x+3}^2-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}+x}{x+3-x^2}=0$, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

9. Dada la función $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-x-2}$, se pide:

a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$. Entonces $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1,\ 2\}$.

Puntos de corte con el eje X. $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-x}{x^2-x-2}=0 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $(1,0)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x=0$, con lo que claramente $y=0$. Entonces, el punto de corte con el eje Y es $(0,0)$ (ya se había obtenido anteriormente).

b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x}{x^2-x-2}=\left[\frac{2}{0}\right]=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x\to -1^- \\ -\infty & \text{si} \quad x\to -1^+ \end{cases}$. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x}{x^2-x-2}=\left[\frac{2}{0}\right]=\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x\to 2^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 2^+ \end{cases}$

De aquí se deduce que $x=-1$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x}{x^2-x-2}=\frac{1}{1}=1$. Por tanto, $y=1$ es una asíntota horizontal.

c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.