1. **[2 puntos]** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x+\dfrac{2+x}{x-1}=6$; b) $\log(x-5)-\dfrac{1}{2}\log(3x-20)=\log 2$

2. **[1 punto]** Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio.

3. **[1 punto]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $\operatorname{tg} x+2\operatorname{sen} x=0$

4. **[1 punto]** Calcular las tres raíces cúbicas del número complejo $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

5. **[1 punto]** Calcula los valores de a y b para que las rectas $r\equiv ax+3y+6=0$ y $s\equiv bx-2y-1=0$ sean perpendiculares y la recta r pasa por el punto $A(3,4)$.

6. **[1 punto]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-3} & \text{si} \quad x\le -2\\ -x^3+x-7 & \text{si} \quad -2<x<1\\ \dfrac{3x^2-2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$, estudiar la continuidad de la función en los puntos $x=-2$ y en $x=1$.

7. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)$

8. Dada la función $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) **[0,6 puntos]** Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
b) **[0,4 puntos]** Representación gráfica aproximada.
c) **[1 punto]** Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x=-1$.

Soluciones

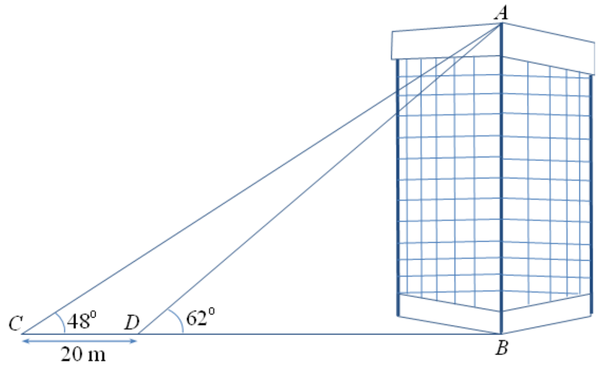
1. a) $x+\dfrac{2+x}{x-1}=6\Rightarrow x(x-1)+2+x=6(x-1)\Rightarrow x^2-x+2+x=6x-6\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2}=\begin{cases}x_1=4\\x_2=2\end{cases}$$

b) $\log(x-5)-\dfrac{1}{2}\log(3x-20)=\log2\Rightarrow2\log(x-5)-\log(3x-20)=2\log2\Rightarrow\log\dfrac{(x-5)^2}{3x-20}=\log4\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{x^2-10x+25}{3x-20}=4\Rightarrow x^2-10x+25=12x-80\Rightarrow x^2-22x-105=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=15\\x_2=7\end{cases}$$

2. Observando la figura de la derecha es fácil darse cuenta de que el ángulo CDA es $180^o-62^o=118^o$ y que, por tanto, el ángulo CAD es $180^o-118^o-48^o=14^o$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ACD tenemos:



$$\frac{AC}{\operatorname{sen}118^o}=\frac{20}{\operatorname{sen}14^o}\Rightarrow AC=\frac{20\cdot\operatorname{sen}118^o}{\operatorname{sen}14^o}\cong73\,\text{m}.$$

Como $\operatorname{sen}48^o=\dfrac{AB}{AC}$, entonces $AC=AB\cdot\operatorname{sen}48^o$, con lo que la altura AB del edificio es: $AC=AB\cdot\operatorname{sen}48^o=73\cdot\operatorname{sen}48^o\cong54,25\,\text{m}$.

3. $\operatorname{tg}x+2\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+2\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x(1+2\cos x)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=0^o\ ;\ x=180^o\\\cos x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=120^o\ ;\ x=240^o\end{cases}$$

4. $$\sqrt[3]{-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i}=\left[\begin{array}{l}r=\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4}{4}}=1\\\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt2/2}{-\sqrt2/2}=\operatorname{arctg}(-1)=315^o\end{array}\right]=1_{315^o}.$$

Entonces $\sqrt[3]{-\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}i}=\sqrt[3]{1_{315^o}}=1_\alpha$. Los valores de α se obtienen mediante la fórmula $\alpha=\dfrac{315^o+360^o k}{3}$, donde k se mueve entre 0 y 2. Por tanto, las tres raíces que se piden son: $r_1=1_{105^o}$, $r_2=1_{225^o}$, $r_3=1_{345^o}$.

5. Como la recta $r\equiv ax+3y+6=0$ pasa por el punto $A(3,4)$, tenemos $3a+12+6=0\Rightarrow3a=-18\Rightarrow a=-6$. Así, la recta r tiene ecuación $r\equiv-6x+3y+6=0\Rightarrow r\equiv2x-y-2=0$. Un vector director suyo es $\vec u=(1,2)$. Por otro lado, un vector director de la recta $s\equiv bx-2y-1=0$ es $\vec v=(2,b)$. Puesto que las rectas son perpendiculares también los son sus vectores directores, con lo que su producto escalar será igual a cero. De aquí se obtiene el valor de b: $\vec u\cdot\vec v=0\Rightarrow(1,2)\cdot(2,b)=0\Rightarrow2+2b=0\Rightarrow2b=-2\Rightarrow b=-1$.

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-3} & \text{si} \quad x\le -2\\ -x^3+x-7 & \text{si} \quad -2<x<1\\ \dfrac{3x^2-2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$; $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\dfrac{x^2+1}{x-3}\right)=\dfrac{5}{-5}=-1\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-x^3+x-7\right)=-(-8)+(-2)-7=-1\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-1$. Además, también $f(-2)=-1$. Por tanto $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=-1$, con lo que f es continua en $x=-2$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^3+x-7\right)=-1+1-7=-7\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x^2-2}{x}\right)=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, por tanto, no existe el límite de la función en $x=1$, con lo que f no es continua en $x=1$. Hay una discontinuidad de salto finito.

7. Límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}^2}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{\left(x^2-1\right)(x-3)}{(x+3)(x-3)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^2+x-3}{x^2-9}=6$

8. $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}$.

a) Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

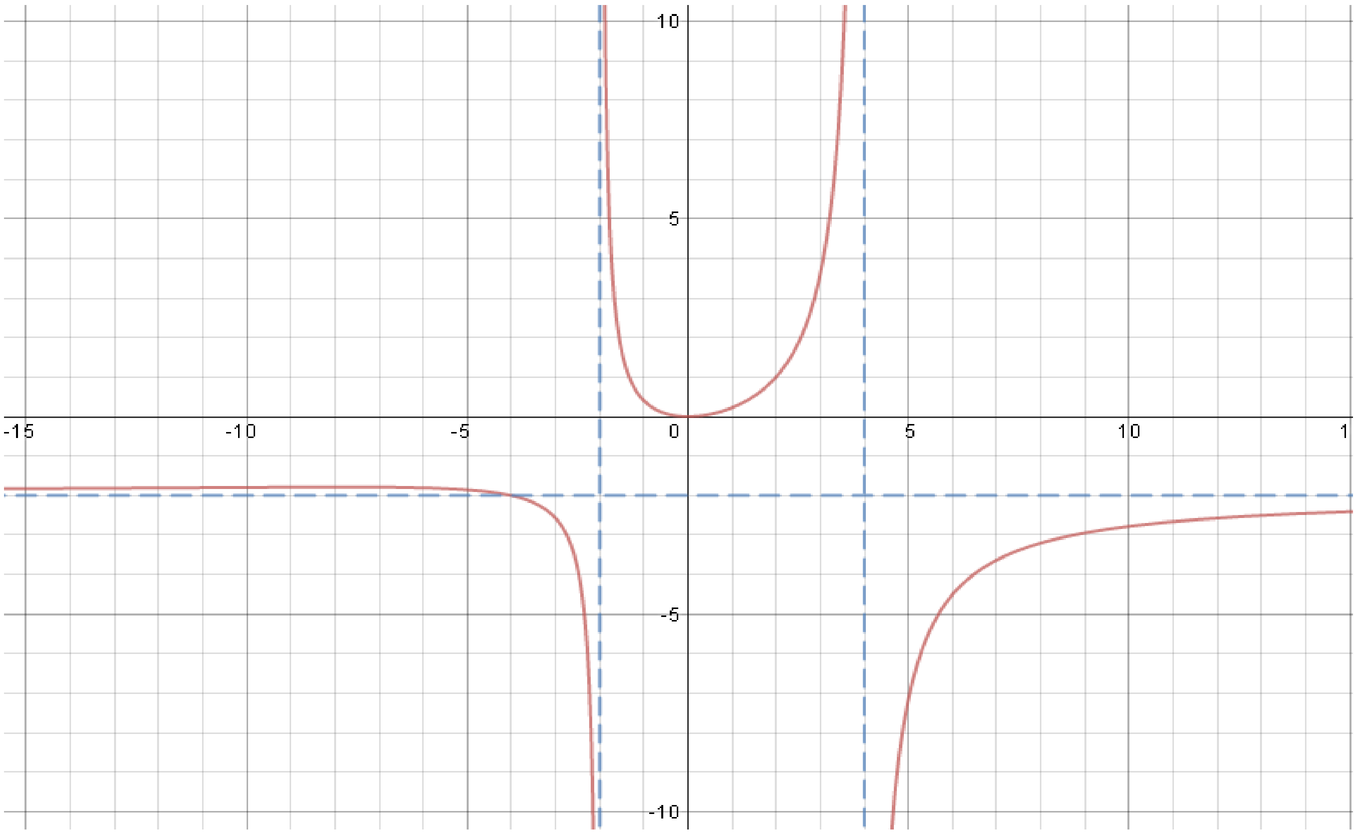
Las soluciones de $x^2-2x-8=0$ son $x=-2$ y $x=4$. Entonces $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-2\ ,\ 4\}$.

Como $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 2^-\\ +\infty & \text{si} \quad x\to 2^+\end{cases}$ y $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to 4^-\\ -\infty & \text{si} \quad x\to 4^+\end{cases}$, resulta que las rectas $x=-2$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

También se tiene que $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=-2$, por lo que $y=-2$ es una asíntota horizontal.

Como la función tiene una asíntota horizontal, no tiene asíntotas oblicuas.

b) Representación gráfica.



c) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x=-1$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $x=-1$ es $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$.

La imagen de -1 es $f(-1)=\dfrac{-2(-1)^2}{(-1)^2-2(-1)-8}=\dfrac{-2}{1+2-8}=\dfrac{-2}{-5}=\dfrac{2}{5}$.

La derivada de f es:

$$f'(x)=\frac{-4x\left(x^2-2x-8\right)-\left(-2x^2\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{-4x^3+8x^2+32x+4x^3-4x^2}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{4x^2+32x^2}{\left(x^2-2x-8\right)^2}.$$

Por tanto, la derivada de f en -1 es $f'(-1)=\dfrac{4(-1)^2+32(-1)}{\left((-1)^2-2(-1)-8\right)^2}=\dfrac{4-32}{(1+2-8)^2}=\dfrac{-28}{(-5)^2}=-\dfrac{28}{25}$.

Así pues, la recta tangente en el punto $x=-1$ es $y-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{28}{25}(x+1)$.