

1. **[1 punto]** Resolver la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log(x-5) - \frac{1}{2}\log(3x-20) = \log 2$$

2. **[1 punto]** El ángulo x es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante. Se sabe además que $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$. Hallar el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$.

3. **[1 punto]** Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48° . Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14° . Calcular la altura del edificio.

4. **[1 punto]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x = 0$$

5. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si } -2 < x < 1, \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad de la función en los

puntos $x = -2$ y en $x = 1$.

6. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} ; \text{ b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x+3} \right)$$

7. **[2 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Representala gráficamente.

$$f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$$

8. **[2 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

$$\text{a) } f(x) = \ln \sqrt{1 - \sqrt{x}} ; \text{ b) } f(x) = \ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^x} \right)$$

Soluciones

$$1. \log(x-5) - \frac{1}{2}\log(3x-20) = \log 2 \Rightarrow 2\log(x-5) - \log(3x-20) = 2\log 2 \Rightarrow \log \frac{(x-5)^2}{3x-20} = \log 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 10x + 25}{3x - 20} = 4 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 12x - 80 \Rightarrow x^2 - 22x - 105 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

$$2. \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Como } \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ entonces:}$$

$$\frac{5}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{3}$$

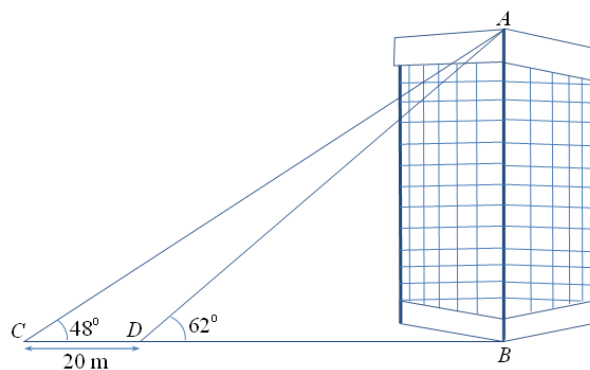
$$\text{Finalmente como } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ entonces } \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

3. Observando la figura de la derecha es fácil darse cuenta de que el ángulo CDA es $180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ y que, por tanto, el ángulo CAD es $180^\circ - 118^\circ - 48^\circ = 14^\circ$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ACD tenemos:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} 118^\circ} = \frac{20}{\operatorname{sen} 14^\circ} \Rightarrow AC = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 118^\circ}{\operatorname{sen} 14^\circ} \cong 73 \text{ m.}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} 48^\circ = \frac{AB}{AC}, \text{ entonces } AC = \frac{AB}{\operatorname{sen} 48^\circ}, \text{ con lo}$$

$$\text{que la altura } AB \text{ del edificio es: } AC = \frac{AB}{\operatorname{sen} 48^\circ} \Rightarrow AB = AC \cdot \operatorname{sen} 48^\circ = 73 \cdot \operatorname{sen} 48^\circ \cong 54,25 \text{ m.}$$



$$4. \operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(1 + 2\cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ; x = 180^\circ \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ; x = 240^\circ \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si } -2 < x < 1 \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2+1}{x-3} \right) = \frac{5}{-5} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^3+x-7) = -(-8)+(-2)-7 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$. Además también $f(-2) = -1$. Por tanto $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -1$, con lo que f es continua en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3+x-7) = -1+1-7 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x^2-2}{x} \right) = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ por tanto no existe el límite de la}$$

función en $x = 1$, con lo que f no es continua en $x = 1$. Hay una discontinuidad de salto finito.

6. Límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}^2}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + \sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x+3} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x^2-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{(x+3)(x-3)} - \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + x - 3}{x^2 - 9} = 6$$

7. $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$. Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$ son $x = -2$ y $x = 4$. Entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$.

Además es claro que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \pm\infty$, por lo que $x = -2$ y $x = 4$ son asíntotas verticales.

También es claro que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$, por lo que $y = -2$ es una asíntota horizontal.

La función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una horizontal).

$$f'(x) = \frac{-4x(x^2 - 2x - 8) - (-2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-4x^3 + 8x^2 + 32x + 4x^3 - 4x^2}{(x^2 - 2x - 8)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 32x}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{4x(x+8)}{(x^2 - 2x - 8)^2}. \text{ Entonces } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -8$$

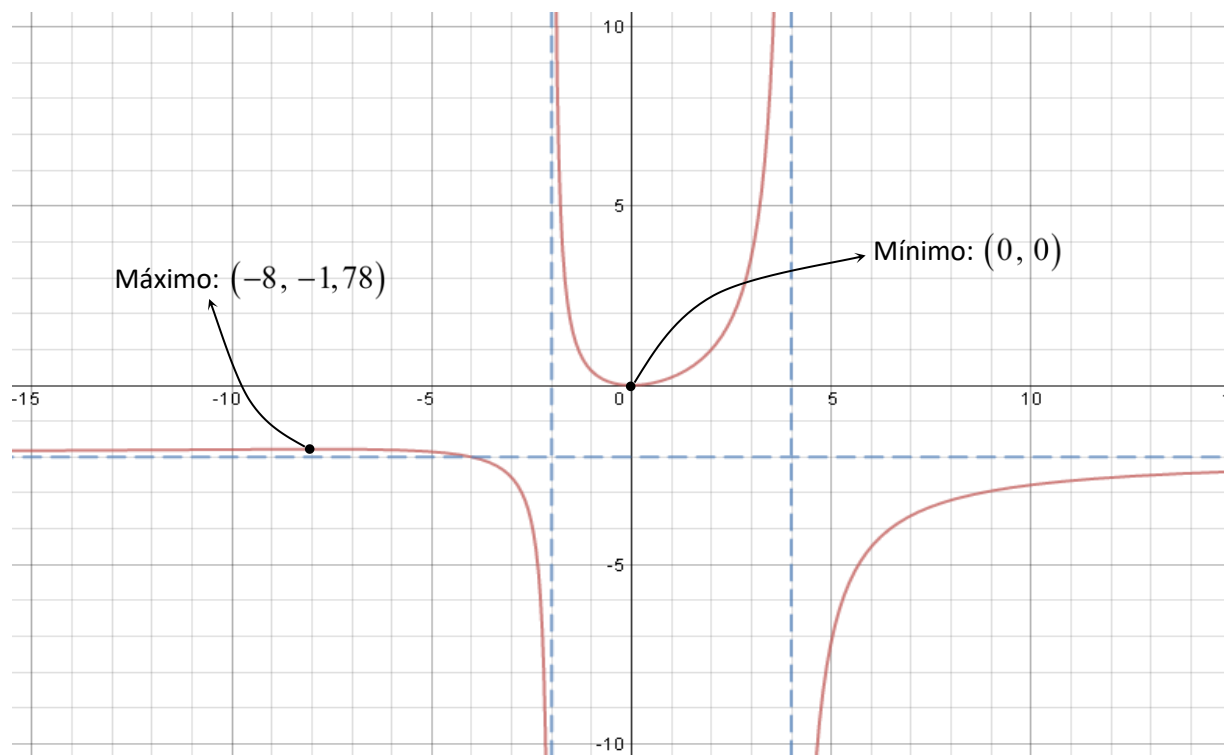
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo de f'	+	-	-	+	+
Monotonía	↑↑	↓↓	↓↓	↑↑	↑↑

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -8) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-8, -2) \cup (-2, 0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x = -8$; concretamente el mínimo relativo es $\left(-8, -\frac{16}{9}\right) = (-8, 1,78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x = 0$; en concreto el máximo relativo es $(0, 0)$.

Representación gráfica:



8. Cálculo de derivadas.

$$a) \quad f(x) = \ln \sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$$

Así está bien, aunque también se puede expresar la derivada de la siguiente manera:

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{-1}{4\sqrt{x}-4x} = \frac{-1(4\sqrt{x}+4x)}{(4\sqrt{x}-4x)(4\sqrt{x}+4x)} = \frac{-4\sqrt{x}-4x}{16x-16x^2} = \frac{-\sqrt{x}-x}{4x-4x^2} = \frac{x+\sqrt{x}}{4x^2-4x}$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln \sqrt{1-\sqrt{x}} = \ln (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln (1-\sqrt{x})$$

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$$

$$b) \quad f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{e^x} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{\sin x}{e^x}} \cdot \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{\sin x} \cdot \frac{e^x (\cos x - \sin x)}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{(e^x)^2 (\cos x - \sin x)}{\sin x (e^x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x - 1$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{e^x} \right) = \ln (\sin x) - \ln e^x = \ln (\sin x) - x$$

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x - 1 = \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \operatorname{ctg} x - 1$$