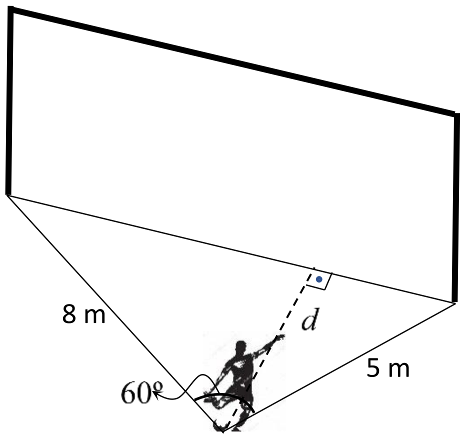
1. **[3 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

$$\text{a) } \log(x+1)-\log x=1 \;;\; \text{b) } \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2} \;;\; \text{c) } \frac{24}{x+5}\le 6-x$$

2. **[1 punto]** En el momento de marcar el último gol de Alemania en la final de la Eurocopa de Inglaterra, Bierhoff estaba situado a 5 metros de uno de los palos y a 8 metros del otro. Desde ese punto, el ángulo con que veía la totalidad de la portería, de un palo al otro, era de 60°. Calcula la distancia d del jugador a la línea de gol (ver figura de la derecha).



3. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x-\frac{1}{\operatorname{sen} x}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

4. **[1 punto]** Halla las cuatro raíces cuartas del número complejo $z=4-3i$, es decir, hallar $\sqrt[4]{z}$.

5. Una recta r pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(4,-2)$.

   a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$.

   b) **[0,5 puntos]** Hallar la distancia del punto C a la recta r.

6. **[1 punto]** Calcular, ***de manera razonada***, los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x^3+7x^2-6x+2}{-x^4+x^3+2x^2-3x+1} \;;\; \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^4-x^2+1}-\sqrt{2}\,x^2\right)$$

7. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}$, se pide:

   a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

   b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.

   c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

   a) $\log(x+1)-\log x=1\Rightarrow\log\frac{x+1}{x}=\log 10\Rightarrow\frac{x+1}{x}=10\Rightarrow x+1=10x\Rightarrow 9x=1\Rightarrow x=\frac{1}{9}$.

   b) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2}\Rightarrow\frac{2x}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(x+1)}{2\sqrt{x}}\Rightarrow 2x+2=\sqrt{x}(x+1)\Rightarrow(2x+2)^2=\left[\sqrt{x}(x+1)\right]^2\Rightarrow$

   $\Rightarrow 4x^2+8x+4=x(x+1)^2\Rightarrow 4x^2+8x+4=x(x^2+2x+1)\Rightarrow 4x^2+8x+4=x^3+2x^2+x\Rightarrow$

   $\Rightarrow x^3-2x^2-7x-4=0$. Usando la regla de Ruffini se obtiene que -1 es raíz doble y 4 raíz simple del polinomio x^3-2x^2-7x-4. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x=-1$ y $x=4$.

   c) $\frac{24}{x+5}\le 6-x\Rightarrow\frac{24}{x+5}-6+x\le 0\Rightarrow\frac{24}{x+5}-\frac{6(x+5)}{x+5}+\frac{x(x+5)}{x+5}\le 0\Rightarrow\frac{24-6x-30+x^2+5x}{x+5}\le 0\Rightarrow$

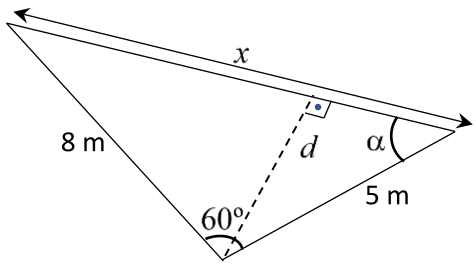
   $\Rightarrow\frac{x^2-x-6}{x+5}\le 0\Rightarrow\frac{(x+2)(x-3)}{x+5}\le 0$. Las raíces del numerador son -2 y 3, y la del denominador -5.

   Elaboremos una tabla:

$(-\infty,-5)$	$(-5,-2)$	$(-2,3)$	$(3,+\infty)$
−	**+**	**−**	**+**

   Por tanto, la solución es $(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)$.

2. **[1 punto]** En el momento de marcar el último gol de Alemania en la final de la Eurocopa de Inglaterra, Bierhoff estaba situado a 5 metros de uno de los palos y a 8 metros del otro. Desde ese punto, el ángulo con que veía la totalidad de la portería, de un palo al otro, era de 60°. Calcula la distancia d del jugador a la línea de gol.



   Lo importante de este problema es el triángulo dibujado "sobre el césped del campo" (ver figura de la derecha).

   Por el teorema del coseno: $x^2=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60^{\circ}\Rightarrow x^2=64+25-40\Rightarrow x^2=49\Rightarrow x=7$.

   Por el teorema de los senos: $\frac{7}{\operatorname{sen}60^{\circ}}=\frac{8}{\operatorname{sen}\alpha}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{8\operatorname{sen}60^{\circ}}{7}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=0{,}99\Rightarrow\alpha=81{,}8^{\circ}$.

   Entonces $\operatorname{sen}81{,}8^{\circ}=\frac{d}{5}\Rightarrow d=5\cdot\operatorname{sen}81{,}8^{\circ}\Rightarrow d=4{,}95$ m.

   Esto quiere decir que Bierhoff estaba casi en posición perpendicular a uno de los palos, ya que su distancia a la línea de gol (4,95 m) es prácticamente igual a su distancia a uno de los palos (5 m).

3. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

   $\operatorname{sen}x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}\operatorname{sen}^2x}{2\sqrt{3}\operatorname{sen}x}-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\operatorname{sen}x}=\frac{-\operatorname{sen}x}{2\sqrt{3}\operatorname{sen}x}\Rightarrow 2\sqrt{3}\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-2\sqrt{3}=0$. El discriminante de esta ecuación es $\Delta=1^2-4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)=1+4\cdot 4\cdot 3=1+48=49$. Entonces:

   $$\operatorname{sen}x=\frac{-1\pm 7}{2\cdot 2\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=\frac{6}{4\sqrt{3}}\Rightarrow\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \operatorname{sen}x=\frac{-8}{4\sqrt{3}}\Rightarrow\operatorname{sen}x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

   . Si $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=60^{\circ}\\ x=120^{\circ}\end{cases}$. Si $\operatorname{sen}x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$, no hay solución porque $\frac{-2\sqrt{3}}{3}<-1$.

4. **[1 punto]** Halla las cuatro raíces cuartas del número complejo $z=4-3i$, es decir, hallar $\sqrt[4]{z}$.

Expresemos en primer lugar el número complejo $z=4-3i$ en forma polar:

$$\begin{cases} r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5 \\ \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-3}{4}=323{,}13^{\text{o}} \end{cases}$$

. Entonces $z=5_{323{,}13^{\text{o}}}$

Por tanto, $\sqrt[4]{4-3i}=\sqrt[4]{5_{323{,}13^{\text{o}}}}=\sqrt[4]{5}_{\beta}$. Los valores de β se obtienen por la fórmula $\beta=\dfrac{323{,}13^{\text{o}}+360^{\text{o}}k}{4}$ donde k se mueve entre 0 y 3. Así pues, las tres raíces que se piden son $\sqrt[4]{5}_{80{,}78^{\text{o}}}$, $\sqrt[4]{5}_{170{,}78^{\text{o}}}$, $\sqrt[4]{5}_{260{,}78^{\text{o}}}$ y $\sqrt[4]{5}_{350{,}78^{\text{o}}}$.

5. **[1 punto]** Una recta r pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(4,-2)$.

a) Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$.

Un vector director de r es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,-4)$. Por tanto, un vector perpendicular suyo será $\vec{n}=(4,3)$. De este modo, la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$ es $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{3}$. Pasando a general: $3x+6=4y-12 \Rightarrow s\equiv 3x-4y+18=0$.

b) Hallar la distancia del punto C a la recta r.

La ecuación general de la recta r es $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-4}\Rightarrow -4x+4=3y-6\Rightarrow 4x+3y-10=0$.

La distancia del punto C a la recta r es: $d(C,r)=\dfrac{|4\cdot(-2)+3\cdot 3-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-8+9-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{9}{5}$ u.

6. **[1 punto]** Calcular, ***de manera razonada***, los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x^3+7x^2-6x+2}{-x^4+x^3+2x^2-3x+1}=\left[\frac{0}{0}\ \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=(*)$$

Para resolver esta indeterminación hemos de factorizar el polinomio del numerador y el del denominador, usando como factor $x-1$.

Usando la regla de Ruffini se tiene que $x^4-4x^3+7x^2-6x+2=(x-1)(x^3-3x^2+4x-2)$. Y, por otro lado, tenemos que $-x^4+x^3+2x^2-3x+1=(x-1)(-x^3+2x-1)$. Entonces:

$$(*)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3-3x^2+4x-2)}{(x-1)(-x^3+2x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+4x-2}{-x^3+2x-1}=\left[\frac{0}{0}\ \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=(**)$$

Volviendo a aplicar la regla de Ruffini usando como factor $x-1$ tenemos:

$$(**)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x+2)}{(x-1)(-x^2-x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+2}{-x^2-x+1}=\frac{1-2+2}{-1-1+1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^4-x^2+1}-\sqrt{2}\,x^2\right)=\left[\infty-\infty\ \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^4-x^2+1}-\sqrt{2}\,x^2\right)\left(\sqrt{2x^4-x^2+1}+\sqrt{2}\,x^2\right)}{\sqrt{2x^4-x^2+1}+\sqrt{2}\,x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^4-x^2+1}^{\,2}-\left(\sqrt{2}\,x^2\right)^2}{\sqrt{2x^4-x^2+1}+\sqrt{2}\,x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^2+1-2x^4}{\sqrt{2x^4-x^2+1}+\sqrt{2}\,x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+1}{\sqrt{2x^4-x^2+1}+\sqrt{2}\,x^2}=\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4}.$$

7. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}$, se pide:

a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1$. Entonces $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Puntos de corte con el eje X. $f\left(x\right)=0 \Rightarrow \dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=0 \Rightarrow 2x^2-x=0 \Rightarrow x\left(2-x\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $\left(0,0\right)$ y $\left(2,0\right)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x=0$, con lo que claramente $y=0$. Entonces, el punto de corte con el eje Y es $\left(0,0\right)$ (ya se había obtenido anteriormente).

b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x\to 1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 1^+ \end{cases}$. De aquí se deduce que $x=1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=\dfrac{2}{1}=2$. Por tanto, $y=2$ es una asíntota horizontal.

c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.