1.- **(4 puntos)** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2+3x}{3x-5} \right)^{\frac{2x-1}{3}} =$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-x-3}{2x^2-2}$

d) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

2.- **(3 puntos)** Calcula las asíntotas de las funciones y su posición respecto a la función

a) $f(x) = \frac{4x^2}{3x^2-27}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

3.- **(3 puntos)**

a) Calcula el valor de a y b para que f(x) sea continua en todo R

$$f(x) = \begin{cases} -2x-a & si \quad x \le 0 \\ x-1 & si \quad 0 < x < 2 \\ bx-5 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

b) Para b = -2 estudia la continuidad de la función en x = 2

1 a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x}{3x-5}\right)^{\frac{2x-1}{3}}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3}\cdot\left(\frac{2+3x}{3x-5}-1\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3}\left(\frac{2+\cancel{3x}-\cancel{3x}+5}{3x-5}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3}\cdot\frac{7}{3x-5}\right)}=$

$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{14x-7}{9x-15}}=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\boxed{e^{\frac{14}{9}}}$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}=\frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-2^2}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(-1)}{\cancel{(3-x)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{-1}{\sqrt{4}+2}=\boxed{\frac{-1}{4}}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-x-3}{2x^2-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{4\cancel{(x-1)}\left(x+\frac{3}{4}\right)}{2(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{4\cdot\left(1+\frac{3}{4}\right)}{2\cdot(1+1)}=\boxed{\frac{7}{4}}$

$4x^2-x-3=0\ \begin{cases}x=1\\ x=-\frac{3}{4}\end{cases}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$

② a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x^2-27}$

A.V. $3x^2-27=0 \Rightarrow 3x^2=27 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{9}=\pm 3}$

Posiciones:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{4x^2}{3x^2-27} = \frac{4\cdot 9^-}{3(3^-)^2-27} = \frac{36^-}{27^--27} = \frac{36^-}{0^-} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{4x^2}{3x^2-27} = \frac{4\cdot 9^+}{3\cdot(3^+)^2-27} = \frac{36^+}{27^+-27} = \frac{36^+}{0^+} = \frac{+}{+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{4x^2}{3x^2-27} = \frac{4\cdot 9^+}{3\cdot(-3^-)^2-27} = \frac{36^+}{27^+-27} = \frac{36^+}{0^+} = \frac{+}{+} = +\infty$$

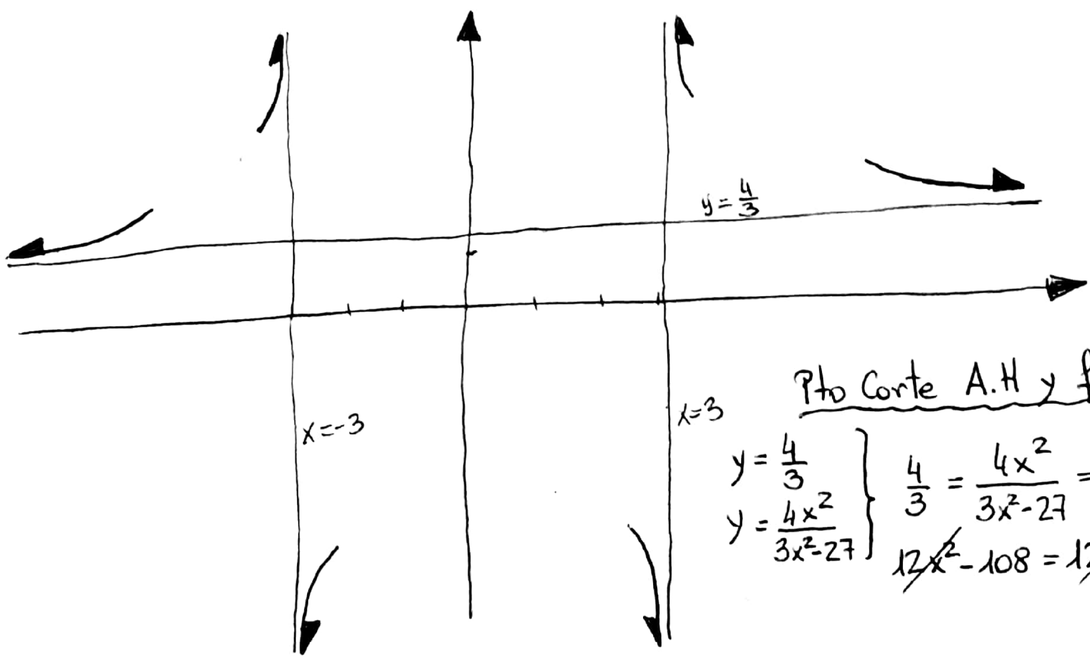
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{4x^2}{3x^2-27} = \frac{4\cdot 9^-}{3\cdot(-3^+)^2-27} = \frac{36^-}{27^--27} = \frac{36^-}{0^-} = \frac{+}{-} = -\infty$$

A.H. $\boxed{y = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{3x^2-27} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{4}{3}}$

Posición:

Si $x=100$ $\begin{cases} y=\frac{4}{3}=1{,}3333 \\ f(100)=\frac{4\cdot 100^2}{3\cdot 100^2-27}=1{,}3345 \end{cases} \Rightarrow f(100) > y=\frac{4}{3}$ Función por encima

Si $x=-100$ $\begin{cases} y=\frac{4}{3}=1{,}3333 \\ f(-100)=\frac{4\cdot(-100)^2}{3\cdot(-100)^2-27}=1{,}3345 \end{cases} \Rightarrow f(100) > y=\frac{4}{3}$ Función por encima.



Pto Corte A.H y f(x)

$\begin{rcases} y=\frac{4}{3} \\ y=\frac{4x^2}{3x^2-27} \end{rcases}$ $\frac{4}{3}=\frac{4x^2}{3x^2-27} \Rightarrow 4\cdot(3x^2-27)=3\cdot 4x^2$

$\cancel{12x^2}-108=\cancel{12x^2} \Rightarrow \underbrace{-108\neq 0}_{\nexists \text{ pto de corte}}$

② b) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

A.V. $\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

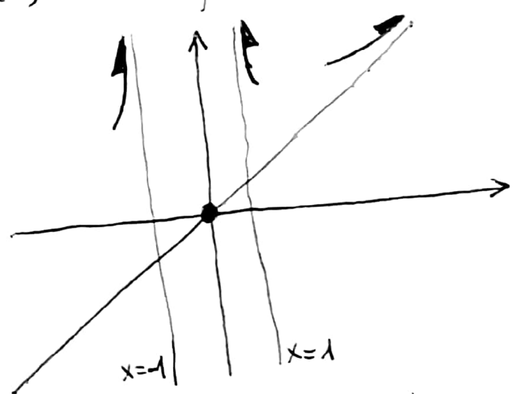
Posición:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(1^+)^2}{\sqrt{(1^+)^2-1}} = \frac{1^+}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(1^-)^2}{\sqrt{(1^-)^2-1}} = \frac{1^-}{\sqrt{0^-}} = \nexists$$

Por ser $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ par, pues $g(-x) = g(x)$ se repite simétricamente

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \nexists \\ \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{simetría respecto } OY$$



A.O. $y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = x}$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} - \frac{x^2}{x^4}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = \underline{1}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{\infty - \infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2-1})(x^2 + x\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1} \cdot (x^2 + x\sqrt{x^2-1})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1} + x \cdot (x^2-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x^3 - x} = \underline{\underline{0}}$$

(pues el grado del denominador es 3 y el del numerador es 2)

Posición: Si $x = 100$ $\left\{\begin{array}{l} y = x \Rightarrow y = 100 \\ y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow y = \frac{10.000}{\sqrt{10.000-1}} = 100{,}005 \end{array}\right.$ $f(x) > A.O$

Si $x = -100$ $\left\{\begin{array}{l} y = x \Rightarrow y = -100 \\ y = \frac{x^2}{\sqrt{\ }} \Rightarrow y = 100{,}005 \end{array}\right\}$ No se aproxima por la izq. la función a la asíntota.

Pto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right\} \quad x = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow x\cdot\sqrt{x^2-1} = x^2$$

$$x^2\cdot(x^2-1) = x^4$$

$$\cancel{x^4} - x^2 = \cancel{x^4}$$

$$0 = x^2 \Rightarrow \underline{x=0} \Rightarrow \underline{y=0}$$

¡¡ P(0,0) pero $\nexists f(x)$!!

$\Rightarrow$ Luego no hay punto de corte.

3

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si} \quad x \le 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -2x-a = -2\cdot 0 - a = -a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x-1 = 0-1 = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -a = -1 \\ \boxed{a=1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x-1 = 2-1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} bx-5 = b\cdot 2-5 = 2b-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 = 2b-5 \\ 1+5 = 2b \\ 6 = 2b \\ \boxed{b=3} \end{array}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 < x < 2 \\ -2x-5 & x \geq 2 \end{cases}$$

En $x=2 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x-1 = 2-1 = 1$$

Discont. SALTO FINITO

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -2x-5 = -2\cdot 2-5 = -4-5 = -9$$

$$S = \left|\lim_{x\to 2^+} f(x) - \lim_{x\to 2^-} f(x)\right| = |1-(-9)| = |1+9| = |10| = \boxed{10}$$