1.- (2 puntos)

Determinar el valor del parámetro a para que las rectas r: $5x - y = 0$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{a}$ formen un ángulo de 60° (Dar resultado de a en forma decimal, aproximando hasta milésimas)

2.- (2 puntos)

Calcula el valor de m para que la distancia entre las rectas r y s sea de 2 unidades, siendo: $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = m + 4t \end{cases}$

3.- (3 puntos)

Calcular la recta r´ simétrica de la recta r: $x - y = 0$ respecto de la recta s: $2x + y - 6 = 0$

4.- (3 puntos)

Calcular el ortocentro del triángulo de vértices $A = (2, 1)$, $B = (-1, 0)$ y $C = (1, -1)$

① ¿a? $(\widehat{r,s}) = 60°$ $r: 5x - y = 0$ $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{a}$

$$\cos(\widehat{r,s}) = |\cos(\vec{U_r}, \vec{U_s})| = \left| \frac{(1,5)\cdot(2,a)}{|(1,5)|\cdot|(2,a)|} \right| = \frac{|1\cdot 2 + 5\cdot a|}{\sqrt{1^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+a^2}} =$$

$\vec{n_r} = (5,-1) \Rightarrow \vec{U_r} = (1,5)$

$\vec{U_s} = (2,a)$

$$= \frac{|2+5a|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{4+a^2}}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{|2+5a|}{\sqrt{104+26a^2}} \Rightarrow \sqrt{104+26a^2} = 2\cdot|2+5a| \Rightarrow$$

Al elevar los 2 miembros al cuadrado, desaparece el valor absoluto por ser igual el resultado:

$$104+26a^2 = 2^2\cdot(2+5a)^2 \Rightarrow 104+26a^2 = 4\cdot(4+20a+25a^2)$$

$$104+26a^2 = 16+80a+100a^2 \Rightarrow 74a^2+80a-88 = 0 \Rightarrow 37a^2+40a-44=0$$

$$a = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2-4\cdot 37\cdot(-44)}}{2\cdot 37} = \frac{-40\pm\sqrt{1600+6512}}{74} = \frac{-40\pm\sqrt{8112}}{74} = \frac{-40\pm 90{,}067}{74} =$$

$$= \begin{cases} \boxed{a_1} = \frac{50{,}067}{74} = \boxed{0{,}6766} \\ \boxed{a_2} = \frac{-130{,}067}{74} = \boxed{-1{,}7577} \end{cases}$$

② ¿m? $d(r,s) = 2$ $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4}$ $s: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = m+4t \end{cases}$

$\vec{U_r} = (3,4)$ $\vec{U_s} = (3,4)$ $\Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ $r \parallel s$

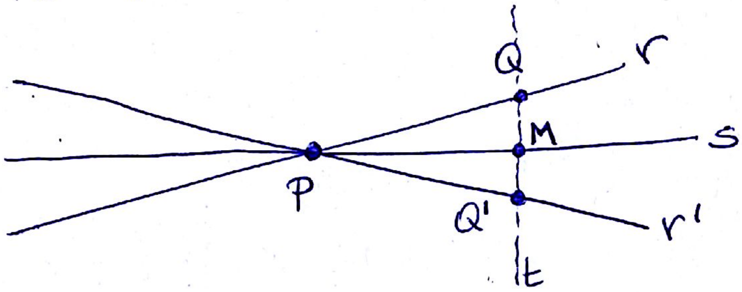
$2 = d(r,s) = d(P_s, r)$ y $P_s = (4,m)$

$r: 4(x-2) = 3(y+2) \Rightarrow 4x - 8 = 3y + 6 \Rightarrow 4x - 3y - 14 = 0 : r$

$$2 = \frac{|4\cdot 4 - 3\cdot m - 14|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|16-3m-14|}{\sqrt{25}} \Rightarrow 2\cdot 5 = |2-3m| \Rightarrow$$

$$10 = |2-3m| \begin{cases} 10 = 2-3m \Rightarrow 3m = 2-10 \Rightarrow 3m = -8 \Rightarrow \boxed{m = \frac{-8}{3}} \\ -10 = 2-3m \Rightarrow 3m = 2+10 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{3} \Downarrow \boxed{m=4} \end{cases}$$

③ ¿r'? r: $x-y=0$ y s: $2x+y-6=0$ $r'=r_s$ (simétrica)



$P = r \cap s$ y $P \in r'$

$Q \in r$ y $t: \begin{cases} Q \in t \\ t \perp s \end{cases}$

$M = t \cap s$

Con Q y M se calcula Q' y por último $r': \begin{cases} P \\ Q' \end{cases}$

$P \begin{cases} r: x-y=0 \Rightarrow x=y \\ s: 2x+y-6=0 \Rightarrow 2x+x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow \underline{x=2} \end{cases} \Rightarrow \underline{y=2}$

Luego $\underline{P(2,2)}$

$Q \in r$ pues fijamos $x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \underline{Q(1,1) \in r}$

Ahora calculamos $M = t \cap s$

$t: \begin{cases} Q(1,1) \\ t \perp s \Rightarrow \vec{n_s} = \vec{v_t} \end{cases} \Rightarrow \vec{n_s} = (2,1) = \vec{v_t} \Rightarrow \underline{\vec{n_t} = (1,-2)}$

$t: 1\cdot(x-1) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow \underline{x-2y+1=0 : t}$

$M = \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+y-6=0 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot 2)} \begin{array}{r} x-2y=-1 \\ 4x+2y=12 \\ \hline \oplus\ 5x \quad = 11 \end{array} \Rightarrow \underline{x = \frac{11}{5}}$

$\frac{11}{5} - 2y = -1$

$\frac{11}{5} + 1 = 2y$

$\frac{16}{5} = 2y \Rightarrow \underline{y = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}}$

$M = \left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pto medio de $\overline{QQ'}$

$\begin{cases} \frac{11}{5} = \frac{1+x'}{2} \Rightarrow 22 = 5+5x' \Rightarrow 17 = 5x' \Rightarrow x' = \frac{17}{5} \\ \frac{8}{5} = \frac{1+y'}{2} \Rightarrow 16 = 5+5y' \Rightarrow 11 = 5y' \Rightarrow y' = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{Q'\left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)}$

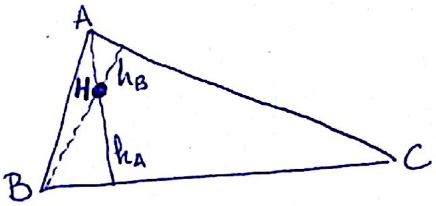
Por último, la recta r' simétrica respecto de s:

$r' \begin{cases} P(2,2) \\ Q'\left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{v_{r'}} = \overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right) - (2,2) = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right) \parallel (7,1)$

Si $\vec{v_{r'}} = (7,1) \Rightarrow \vec{n_{r'}} = (1,-7)$ y con la ec. normal:

$r': 1\cdot(x-2) - 7(y-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x-7y+12=0 : r'}$

④ ¿H? $\overset{\triangle}{ABC}$ donde $A(2,1)$, $B(-1,0)$ y $C(1,-1)$



$H = h_A \cap h_B$

$h_A \begin{cases} A(2,1) \\ h_A \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n}_{h_A} = \overrightarrow{BC} = (1,-1)-(-1,0) = (2,-1) \end{cases}$

Con la ec. normal: h_A: $2(x-2) - 1(y-1) = 0 \Rightarrow \underline{2x - y - 3 = 0 : h_A}$

$h_B \begin{cases} B(-1,0) \\ h_B \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (1,-1) - (2,1) = (-1,-2) \end{cases}$

Con la ec. normal: h_B: $-1(x+1) - 2(y-0) = 0 \Rightarrow \underline{-x - 2y - 1 = 0 : h_B}$

El ORTOCENTRO $H = h_A \cap h_B$, para lo que resolvemos el sistema:

$H \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot 2)}$

$$\begin{array}{r} 2x - y - 3 = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \\ \hline \oplus / \quad -5y - 5 = 0 \end{array} \Rightarrow -5 = 5y \Rightarrow \underline{y = -1}$$

Si $y = -1 \Rightarrow 2x - (-1) - 3 = 0 \Rightarrow 2x + 1 - 3 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x = 1}$

Luego $\boxed{H = (1,-1)}$