1. Clasifica estos números según el tipo al que pertenecen $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, I, \mathbb{R})$

$0.\widehat{7}$ $\boxed{Q, R}$ $\quad$ $685{,}00\overline{91}$ $\boxed{Q, R}$ $\quad$ 67 $\boxed{N, Z, Q, R}$ $\quad$ $-456{,}89$ $\boxed{Q, R}$

-16 $\boxed{Z, Q, R}$ $\quad$ $-0{,}0201$ $\boxed{Q, R}$ $\quad$ $\frac{27}{44}$ $\boxed{Q, R}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{34}}{8}$ $\boxed{I, R}$

2. Expresa en forma de fracción:

a) $0{,}22 = \boxed{\frac{22}{100}}$

b) $-34.\overline{03} = \boxed{\frac{-3369}{99} = \frac{-1123}{33}}$

c) $25{,}1\overline{12} = \boxed{\frac{24861}{990}}$

d) $5{,}13\overline{7} = \boxed{\frac{4624}{900}}$

e) $0{,}1\overline{043} = \boxed{\frac{1042}{9990}}$

f) $-2.\overline{302} = \boxed{\frac{-2300}{999}}$

3. Obtén el valor absoluto de los números

a) 7 $\boxed{|7| = 7}$

b) 0 $\boxed{|0| = 0}$

c) -1 $\boxed{|-1| = 1}$

d) -6^2 $\boxed{\left|-6^2\right| = |-36| = 36}$

e) -2^3 $\boxed{\left|-2^3\right| = |-8| = 8}$

f) $(-6)^2$ $\boxed{\left|\left(-6^2\right)\right| = |36| = 36}$

4. Calcula las siguientes potencias:

a) $-3^2 = \boxed{-9}$

b) $-3^3 = \boxed{-27}$

c) $(-2)^6 = \boxed{64}$

d) $(-2)^3 = \boxed{-8}$

e) $(-2)^7 = \boxed{-128}$

f) $\left(\frac{10}{-2}\right)^2 = \boxed{(-5)^2 = 25}$

g) $\left(\frac{-15}{3}\right)^3 = \boxed{(-5)^3 = -125}$

5. Simplifica y expresa el resultado como potencia:

a) $\frac{5^{14} \cdot 3^3 \cdot 6^{-2}}{5^7 \cdot 3^{-3} \cdot 6^{-4}} = \boxed{5^7 \cdot 3^9 \cdot 6^2}$

b) $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{2^7}}$

c) $\frac{\left(a^3 \cdot b^4\right)^{-2}}{\left(a^{-2} \cdot b^{-3}\right)^3} = \boxed{b}$

d) $\frac{2^7 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{25}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} = \boxed{\frac{5^7 \cdot 3^3}{2^{15}}}$

e) $\frac{\frac{1}{2^{-5}} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^3}{\left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{3^5}{2^4}}$

f) $\frac{\left(a^3 \cdot b^{-4}\right)^{-2} \cdot \left(a^4 \cdot b\right)^2}{\left(a^{-2} \cdot b^{-3}\right)^{-3}} = \boxed{\frac{b}{a^4}}$

6. Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica:

a) $1{,}32 \cdot 10^4 + 2{,}75 \cdot 10^{-3} = \boxed{1{,}32 \cdot 10^4}$

b) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3} - 1{,}32 \cdot 10^4 = \boxed{-3{,}83 \cdot 10^{38}}$

c) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3} = \boxed{3{,}83 \cdot 10^{38}}$

d) $\frac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}32 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^4} = \boxed{4{,}199 \cdot 10^4}$

7. Halla el valor numérico de estos radicales:

a) $\sqrt[4]{81} = \boxed{3}$

b) $\sqrt[3]{-27} = \boxed{-3}$

c) $\sqrt[5]{-100000} = \boxed{-1}$

d) $\sqrt[3]{-216} = \boxed{-6}$

e) $\sqrt[4]{625} = \boxed{-5}$

f) $\sqrt[7]{-128} = \boxed{-2}$

8. Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales:

a) $\sqrt{a \cdot \sqrt{a}} = \boxed{a^{\frac{3}{4}}}$

b) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}} = \boxed{a^{\frac{7}{12}}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}} = \boxed{a^{\frac{1}{4}}}$

d) $\sqrt[4]{a^{-5}} = \boxed{a^{\frac{-5}{4}}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \boxed{a^{\frac{-1}{2}}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}} = \boxed{a^{\frac{-1}{4}}}$

g) $(\sqrt{a})^3 = \boxed{a^{\frac{3}{2}}}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}} = \boxed{a^{\frac{-1}{3}}}$

9. Expresa mediante un solo radical:

a) $\sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{5}} = \boxed{\sqrt[10]{3^2 \cdot 5}}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}} = \boxed{\sqrt[12]{2}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = \boxed{\sqrt[8]{a}}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{a}}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \boxed{\sqrt[12]{x}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}}$

10. Extrae los factores que puedas de la raíz:

a) $\sqrt{25} = \boxed{5}$

b) $\sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[3]{16} = \boxed{2\sqrt[3]{2}}$

d) $\sqrt[3]{54} = \boxed{3\sqrt[3]{2}}$

e) $\sqrt[4]{32} = \boxed{2\sqrt[3]{2}}$

f) $\sqrt{27} = \boxed{\sqrt{3}}$

g) $\sqrt[5]{128} = \boxed{2\sqrt[5]{4}}$

h) $\sqrt[6]{27} = \boxed{\sqrt[2]{3}}$

i) $\sqrt[3]{1000} = \boxed{10}$

j) $\sqrt[3]{40} = \boxed{2\sqrt[2]{5}}$

k) $\sqrt[3]{8 \cdot a^5} = \boxed{8a^3\sqrt[3]{a^2}}$

l) $\sqrt[4]{16 \cdot a^7} = \boxed{2a\sqrt[4]{a^3}}$

m) $\sqrt[4]{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{10}} = \boxed{abc^2\sqrt[4]{b^2 \cdot c^2}}$

n) $\sqrt[5]{a^7 \cdot b^{15} \cdot c^{10}} = \boxed{ab^3c^2\sqrt[5]{a^2}}$

ñ) $\sqrt[3]{15625 \cdot x^4 \cdot b^3} = \boxed{5^2xb\sqrt[3]{x}}$

11. Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \boxed{1}$

b) $(5\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{2} + 3) = \boxed{41}$

c) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) + (2 - 4\sqrt{5}) \cdot (2 + 4\sqrt{5}) = \boxed{64}$

d) $(2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = \boxed{12 + 4\sqrt{3}}$

e) $(3\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3) = \boxed{-29\sqrt{2} + 39}$

f) $(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5}) = \boxed{7 + 2\sqrt{2}}$

g) $(3 + \sqrt{5} - 4\sqrt{7}) \cdot (3 - \sqrt{5} + 4\sqrt{7}) = \boxed{8\sqrt{35} - 108}$

h) $(7\sqrt{5} + 4) \cdot (5\sqrt{5} - 3\sqrt{6}) = \boxed{175 - 21\sqrt{30} + 20\sqrt{5} - 12\sqrt{6}}$

i) $(7\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{3} + 2) = \boxed{35\sqrt{6} + 14\sqrt{2} - 15\sqrt{3} - 6}$

12. Racionaliza (elimina la raíces del denominador) y simplifica:

a) $\frac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}} = \boxed{6-\sqrt{6}}$

b) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}-1}$

c) $\frac{-28}{2\sqrt[4]{7}} = \boxed{-2\sqrt[4]{7^3}}$

d) $\frac{9\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3^5}} = \boxed{\sqrt[4]{2\cdot 3^3}}$

e) $\frac{7+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}} = \boxed{\frac{(7+\sqrt{5})\sqrt[4]{3^2}}{3} = (7+\sqrt{5})\sqrt{\frac{1}{3}}}$

13. Elimina las raíces del denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \boxed{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \boxed{-3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$

c) $\frac{-5}{\sqrt{3}-2} = \boxed{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

d) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \boxed{\frac{24+4\sqrt{10}}{13}}$

e) $\frac{8}{\sqrt{11}-3} = \boxed{8\left(\sqrt{11}+3\right)}$

f) $\frac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} = \boxed{5\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)}$

g) $\frac{-8}{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \boxed{-2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}$

h) $\frac{45}{3\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)} = \boxed{3\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}$

i) $\frac{8}{5\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)} = \boxed{\frac{2}{5}\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)}$

j) $\frac{-27}{9\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)} = \boxed{-\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}$

14. Halla el resultado de las expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos. Luego comprueba con tu calculadora.

a) $log_3 81 = \boxed{4}$

b) $log_2 8 = \boxed{3}$

c) $log\ 0{,}1 + log\ 10 = \boxed{0}$

d) $log_4 32 = \boxed{\frac{5}{2}}$

e) $2\cdot log_4 16 + log_2 32 - 3log_7 49 = \boxed{1}$

f) $log_2 8 + log_3 27 + log_5 125 = \boxed{9}$

g) $log_5 25 + log_3 9 + log_4 16 = \boxed{6}$

h) $log_5 625 - log_9 81 + log_8 64 = \boxed{4}$

15. Obtén el valor de x en las siguientes igualdades logarítmicas y exponenciales.

a) $log_x 256 = -8$ $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

b) $log_3 x = \frac{2}{3}$ $\boxed{x = \sqrt[3]{9}}$

c) $log_5 \sqrt[6]{625} = x$ $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

d) $log_x 3 = 2$ $\boxed{x = +\sqrt{3}}$

e) $log_3 9^x = 2$ $\boxed{x = 1}$

f) $log_3 9^{x+3} = 3$ $\boxed{x = 0}$

g) $ln 3^x = -1$ $\boxed{x \simeq -0{,}91}$

h) $log_2 4^{x+4} = -2$ $\boxed{x = -5}$

i) $log_3 27^{3x+4} = -2$ $\boxed{x = \frac{-14}{9}}$

j) $8^x = 1024$ $\boxed{x = \frac{10}{3}}$

k) $8^{x+1} = 1024$ $\boxed{x = \frac{7}{3}}$

l) $3^{x^2} = 27$ $\boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

m) $3^{x^2-6} = 27$ $\boxed{x = \pm 3}$

n) $10^{x-1} = 10^3$ $\boxed{x = 4}$

ñ) $(3^x)^2 = 27$ $\boxed{x = \frac{3}{2}}$

o) $3^{x^2} + 18 = 27$ $\boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

p) $2^{x^2-2x+1} = 1$ $\boxed{x = 1}$

q) $log_5 x = log_{25} x$ $\boxed{x = 1}$

16. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.

   Falsa, pues los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y no se pueden escribir como fracción.

   b) Todos los números reales son racionales.

   Falsa, porque hay números reales que son irracionales. Por ejemplo; π, $\sqrt{a}$ siendo no raíz exacta, ...

   c) Cualquier número irracional es real.

   Verdadera, ya que los números irracionales junto con los racionales forman los reales.

   d) Hay números enteros que son irracionales.

   Falsa, porque si son enteros no pueden tener infinitas cifras no periódicas.

   e) Existen números reales que son racionales.

   Verdadera, porque todos los números que se pueden expresar en forma de fracción son racionales, que además son reales.

   f) Todo número decimal es racional.

   Falsa, pues los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas son irracionales.

   g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.

   Verdadera, ya que los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

   h) Todos los números racionales tiene infinitas cifras decimales que se repiten.

   Falsa, pues los decimales exactos no tienen infinitas cifras decimales y son racionales.

   i) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

   Verdadera, porque por definición los números racionales son todos aquellos números que pueden ser expresados en forma de fracción.

17. ☻ Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguiente expresiones:

   a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$ Verdadera ($b > 0$)

   b) $|-a| = -|a|$ Falsa

   c) $|a + b| = |a| + |b|$ Falsa.

   d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ Verdadera

18. Si $x \neq 0$, explica si estas afrmaciones son verdaderas o falsas. Pon un ejemplo numérico en caso de ser falsa.

   a) Si x es negativo , entonces x^{-2} es negativo. Falso

   b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x. Verdadera

   c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$. Falso

   d) Si $x < 0$ entonces $\sqrt{x^2} < x$. Falso

19. Comprueba si son verdaderas o falsas estas igualdades, dando un ejemplo para comprobarlo.

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a \cdot b}$ $\boxed{\text{Falso}}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$ $\boxed{\text{Falso}}$

c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ $\boxed{\text{Falso}}$

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$ $\boxed{\text{Falso}}$

e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$ $\boxed{\text{Verdadera}}$

f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$ $\boxed{\text{Falso}}$

g) $\sqrt[4]{a^8 \cdot b^2} = a^2\sqrt{b}$ $\boxed{\text{Verdadera}}$

h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ $\boxed{\text{Falso}}$

20. Determina cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y corrige las que no lo sean.

a) $log\,(a+b) = loga + logb$ $\boxed{\text{Falsa. } log\,(a \cdot b) = log\,a + log\,b}$

b) $log\,(0) = 1$ $\boxed{\text{Falsa. } log\,(1) = 0}$

c) $log\left(\frac{a}{b}\right) = log\,a - log\,b$ $\boxed{\text{Verdadera}}$

d) $log\,(a)^n = log\,n \cdot log\,a$ $\boxed{\text{Falsa. } log\,(a)^n = n \cdot log\,a}$

e) $log\left(x^2\right) = log\,x + log\,x$ $\boxed{\text{Verdadera}}$

f) $log\left(a^2 - b^2\right) = log\ (a+b) + log\ (a-b)$ $\boxed{\text{Verdadera}}$