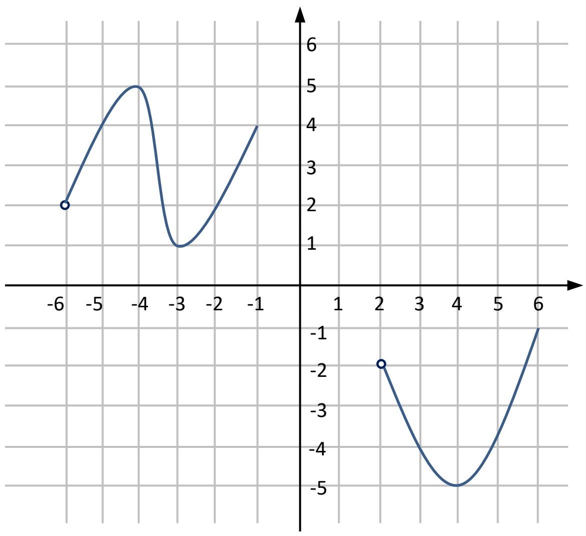
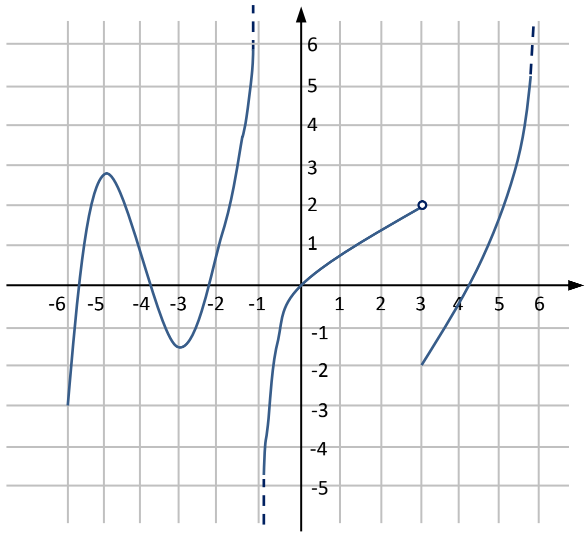
1. Halla el dominio y los puntos de corte con el eje X y con el eje Y de cada una de las siguientes funciones:
   a) **[1 punto]** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$
   b) **[1 punto]** $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$
2. **[2 puntos]** Halla el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y los mínimos relativos de la función cuya gráfica es, de las dos de más abajo, la de la izquierda.
3. **[1 punto]** Estudia la continuidad, la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función cuya gráfica es la que está a la derecha. En los puntos donde no sea continua debes de explicar el tipo de discontinuidad.





4. Estudiar si las siguientes funciones son pares o impares (o ninguna de las dos cosas). En cada caso explicar el tipo de simetría que presentan.
   a) [0,5 puntos] $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$
   b) [0,5 puntos] $g(x)=\sqrt{2x^4-x^2+3}$
5. **[1 punto]** Hallar la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,-3)$ y $(-2,5)$
6. **[1,5 puntos]** Representa la siguiente función definida por trozos.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -4\le x<1 \\ -x & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 2x-6 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

   Hay un punto donde la función no es continua. ¿Cuál es? ¿Qué tipo de discontinuidad se da en ese punto?
7. Dada la función cuadrática $f(x)=2x^2-4x-\dfrac{5}{2}$, se pide:
   a) **[0,5 puntos]** Hallar el vértice.
   b) **[0,5 puntos]** Calcular los puntos de corte con los ejes.
   c) **[0,5 puntos]** Utiliza los puntos anteriores y algunos puntos más y realiza la representación gráfica de la parábola.

Soluciones:

1. Dominio y puntos de corte con los ejes.

   a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ es una función racional. Su dominio será todo $\mathbb{R}$ salvo los números que anulen el denominador. $x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$. Por tanto $Dom\ f=\mathbb{R}-\{-1,\ 2\}$

   Puntos de corte con el eje X. Hacemos $y=0$. Entonces $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$. Por tanto los punto de corte con el eje X son $(-2,\ 0)$ y $(2,\ 0)$.

   Punto de corte con el eje Y. Hacemos $x=0$. Entonces $y=\dfrac{0^2-4}{0^2-0-2}=2$. Así pues el punto de corte con el eje Y es $(0,\ 2)$.

   b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. En primer lugar hallamos el dominio de $y=\sqrt{x+2}$, que estará formado por aquellos números que cumplan que $x+2\geq 0$, es decir, que $x\geq -2$. A estos les debemos de quitar el número que anule el denominador de $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$, es decir, $x=1$. Por tanto: $Dom\ f=[-2,\ +\infty)-\{1\}$.

   Puntos de corte con el eje X. Hacemos $y=0$. Entonces $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

   Por tanto el punto de corte con el eje X es $(-2,\ 0)$.

   Punto de corte con el eje Y. Hacemos $x=0$. Entonces $y=\dfrac{\sqrt{0+2}}{0-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$. Así pues el punto de corte con el eje Y es $\left(0,\ -\sqrt{2}\right)$.

2. Gráfica de la izquierda:

   Dominio: $(-6,\ -1]\cup(2,\ 6]$

   Imagen: $[-5,\ -1]\cup[1,\ 5]$

   Crecimiento: $(-6,\ -4)\cup(-3,\ -1)\cup(4,\ 6)$

   Decrecimiento: $(-4,\ -3)\cup(2,\ 4)$

   Máximos: $(-4,5)$, $(-1,4)$, $(6,-1)$

   Mínimos: $(-3,1)$, $(4,-5)$

3. Gráfica de la derecha:

   Es continua en $[-6,\ -1)\cup(-1,\ 3)\cup(3,\ 6)$

   No es continua en el punto $x=3$, donde hay una discontinuidad de salto finito. En $x=-1$ hay un salto infinito.

   Concavidad: $(-4,\ -1)\cup[3,\ 6)$

   Convexidad: $[-6,-4)\cup(-1,\ 3)$

   Punto de inflexión: $(-4,1)$

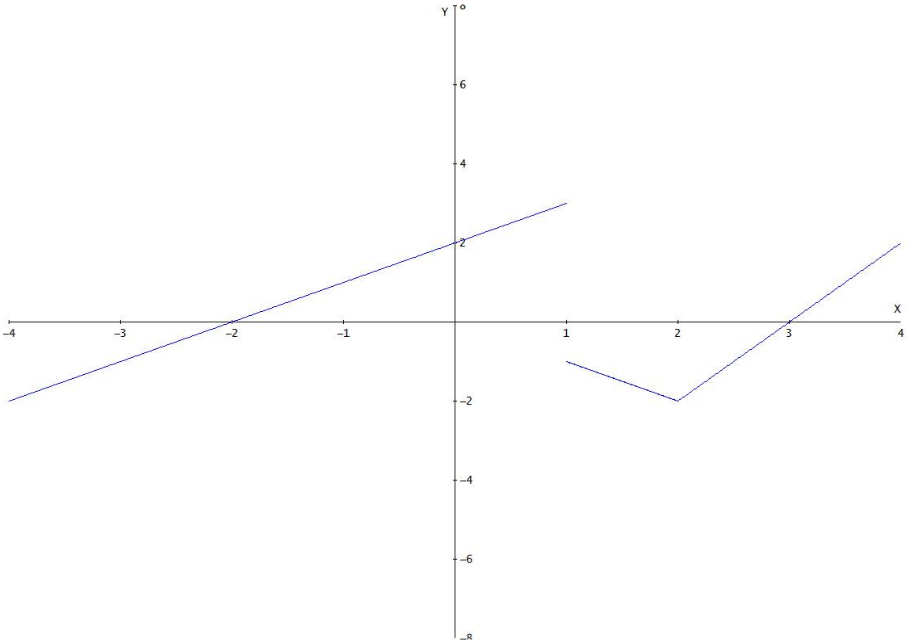
4. Estudiar si son pares o impares

   a) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $f(-x)=-x-\dfrac{1}{-x}=-x+\dfrac{1}{x}$, $-f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-x+\dfrac{1}{x}$. Por tanto $f(-x)=-f(x)$ y f es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

   b) $g(x)=\sqrt{2x^4-x^2+3}$, $g(-x)=\sqrt{2(-x)^4-(-x)^2+3}=\sqrt{2x^4-x^2+3}$. Por tanto $g(x)=g(-x)$ y g es impar, es decir, simétrica respecto del eje Y.

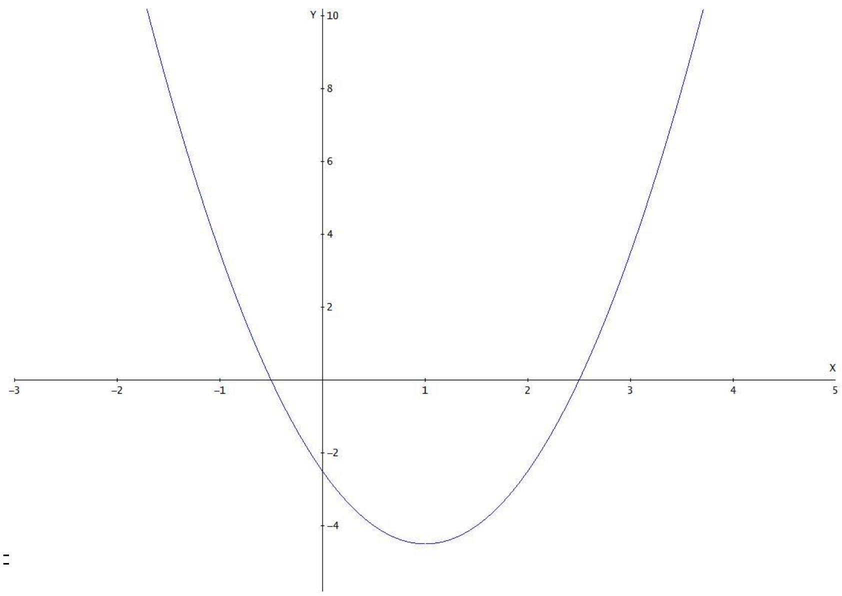
5. La pendiente viene dada por $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow m=\dfrac{5-(-3)}{-2-2}=\dfrac{8}{-4}\Rightarrow m=-2$. Esto quiere decir que la recta es de la forma $y=-2x+n$. Para hallar n sustituimos en la ecuación de la recta uno de los dos puntos, por ejemplo el $(2,\,-3)$: $-3=-2\cdot 2+n\Rightarrow -3=-4+n\Rightarrow -3+4=n\Rightarrow n=1$. Por tanto la ecuación de la recta es $y=-2x+1$.

6. Representación de la función definida por trozos.



En $x=1$ hay una discontinuidad de salto finito.

7. Parábola: $f(x)=2x^2-4x-\dfrac{5}{2}$



a) Vértice. $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-4)}{2\cdot 2}=\dfrac{4}{4}=1$;

$$y=f(1)=2\cdot 1^2-4\cdot 1-\frac{5}{2}=$$

$$=2-4-\frac{5}{2}=-2-\frac{5}{2}=-\frac{9}{2}.$$

Por tanto el vértice de la parábola es el punto $V\left(1,\,-\dfrac{9}{2}\right)=V(1,\,-4{,}5)$

b) Corte eje Y: $(0,\,c)=\left(0,\,-\dfrac{5}{2}\right)$.

Cortes con el eje X:

$$2x^2-4x-\frac{5}{2}=0\Rightarrow 4x^2-8x-5=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{2}\\[2mm] x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, lo que quiere decir que los puntos de corte con el eje X son $\left(\dfrac{5}{2},\,0\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{2},\,0\right)$

c) Representación gráfica (ver imagen de la derecha).