

1. **[1 punto]** Supongamos que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ y que el ángulo α está en el segundo cuadrante.

Hallar $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{cos} \alpha$. Dar el resultado exacto, racionalizado y simplificado.

2. **[2 puntos]** En el centro de un lago sale verticalmente hacia arriba un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68° . Alejándose 75 metros del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37° . Calcula la altura del chorro de agua. Realizar un dibujo adecuado de la situación.

3. **[1 punto]** Usa las propiedades de las potencias para operar y dar el resultado en forma de una sola potencia.

$$\text{a) } \frac{5^3}{(5^{-2})^3 \cdot 5} \quad ; \quad \text{b) } \frac{2^{-3} \cdot (-2)^4 \cdot (-4)^{-1}}{-2}$$

4. **[2 puntos]** Realiza las operaciones usando las propiedades de las potencias hasta simplificar el resultado al máximo. Puedes expresar el resultado en forma de potencia.

Consejo: factoriza previamente los números que no sean primos.

$$\text{a) } \frac{25^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{(5^3)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}} \quad ; \quad \text{b) } \frac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6}$$

5. **[1 punto]** Opera y expresa el resultado en forma de un solo radical.

$$\text{a) } -\sqrt{75} + \frac{3\sqrt{12}}{2} \quad ; \quad \text{b) } \sqrt{8} + 3 \cdot (2\sqrt{18} - \sqrt{50})$$

6. **[2 puntos]** Usa las propiedades de los radicales para expresar el resultado en forma de un solo radical. Extrae factores del resultado final si es posible.

$$\text{a) } \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[8]{81} \quad ; \quad \text{b) } \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}}{\sqrt[3]{2}}$$

7. **[1 punto]** Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

$$\text{a) } \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} \quad ; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

Soluciones

1. **[1 punto]** Supongamos que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ y que el ángulo α está en el segundo cuadrante.

Hallar $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$. Dar el resultado exacto, racionalizado y simplificado.

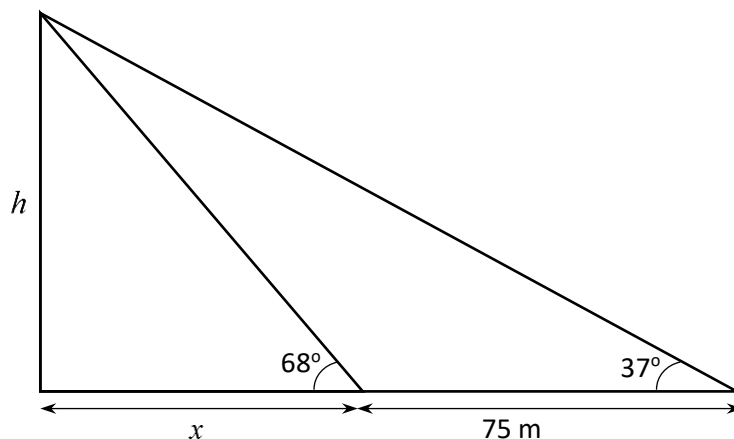
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{10}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{14}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2}{7} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{2}{7}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{140}}{14} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 7}}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{35}}{14} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

2. **[2 puntos]** En el centro de un lago sale verticalmente hacia arriba un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68° . Alejándose 75 metros del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37° . Calcula la altura del chorro de agua. Realizar un dibujo adecuado de la situación.



En la figura anterior hemos llamado h a la altura del chorro de agua. También hemos llamado x a la distancia del centro del lago a la orilla. Teniendo esto en cuenta podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 68^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 37^\circ = \frac{h}{x + 75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,48 = \frac{h}{x} \\ 0,75 = \frac{h}{x + 75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2,48x \\ h = 0,75(x + 75) \end{cases}$$

$$\text{Entonces: } 2,48x = 0,75(x + 75) \Rightarrow 2,48x = 0,75x + 56,25 \Rightarrow 1,73x = 56,25 \Rightarrow x = \frac{56,25}{1,73} \Rightarrow x = 32,51$$

$$\text{Sustituyendo el valor de } x \text{ en la primera ecuación: } h = 2,48x \Rightarrow h = 2,48 \cdot 32,51 \Rightarrow h = 80,62$$

Por tanto, la altura del chorro de agua es de 80,62 metros.

3. [1 punto] Usa las propiedades de las potencias para operar y dar el resultado en forma de una sola potencia.

$$a) \frac{5^3}{(5^{-2})^3 \cdot 5} = \frac{5^3}{5^{-6} \cdot 5} = \frac{5^3}{5^{-5}} = 5^8$$

$$b) \frac{2^{-3} \cdot (-2)^4 \cdot (-4)^{-1}}{-2} = \frac{2^{-3} \cdot 2^4 \cdot 4^{-1}}{2} = \frac{2^{-3} \cdot 2^4 \cdot (2^2)^{-1}}{2} = \frac{2^{-3} \cdot 2^4 \cdot 2^{-2}}{2} = \frac{2^{-1}}{2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

4. [2 puntos] Realiza las operaciones usando las propiedades de las potencias hasta simplificar el resultado al máximo. Puedes expresar el resultado en forma de potencia.

Consejo: factoriza previamente los números que no sean primos.

$$a) \frac{25^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{(5^3)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}} = \frac{(5^2)^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot (3^2 \cdot 5)^2}{(5^3)^2 \cdot 3^3 \cdot 3^{-2}} = \frac{5^4 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2}{5^6 \cdot 3^3 \cdot 3^{-2}} = \frac{3^4 \cdot 5^7}{3^1 \cdot 5^6} = 3^3 \cdot 5^1 = 27 \cdot 5 = 135$$

$$b) \frac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6} = \frac{(2^2)^4 \cdot (2^3)^{-1} \cdot (2^4)^2}{(2^{-1})^3 \cdot (2^3)^6} = \frac{2^8 \cdot 2^{-3} \cdot 2^8}{2^{-3} \cdot 2^{18}} = \frac{2^{13}}{2^{15}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

5. [1 punto] Opera y expresa el resultado en forma de un solo radical.

$$a) -\sqrt{75} + \frac{3\sqrt{12}}{2} = -\sqrt{3 \cdot 5^2} + \frac{3}{2} \sqrt{2^2 \cdot 3} = -5\sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{3} = -5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (-5+3)\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt{8} + 3 \cdot (2\sqrt{18} - \sqrt{50}) = \sqrt{2^3} + 3 \cdot (2\sqrt{2 \cdot 3^2} - \sqrt{2 \cdot 5^2}) = 2\sqrt{2} + 3 \cdot (2 \cdot 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) = \\ = 2\sqrt{2} + 3 \cdot (6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

6. [2 puntos] Usa las propiedades de los radicales para expresar el resultado en forma de un solo radical. Extrae factores del resultado final si es posible.

$$a) \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[8]{81} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[24]{2^{12}} \cdot \sqrt[24]{2^{12}} \cdot \sqrt[24]{3^{12}} = \sqrt[24]{2^{12} \cdot 2^{12} \cdot 3^{12}} = \sqrt[24]{2^{24} \cdot 3^{12}} = 2 \sqrt[24]{3^{12}} = 2\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

7. [1 punto] Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

$$a) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}} = \frac{3\sqrt{54}}{\sqrt{27^2}} = \frac{3\sqrt{2 \cdot 3^3}}{27} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 2}}{27} = \frac{9\sqrt{6}}{27} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$b) \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{27} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{7} + \sqrt{7}\sqrt{5} + \sqrt{5}\sqrt{7} + \sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{7^2} - \sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{49} + \sqrt{35} + \sqrt{35} + \sqrt{25}}{7 - 5} = \\ = \frac{7 + \sqrt{35} + \sqrt{35} + 5}{2} = \frac{12 + 2\sqrt{35}}{2} = 6 + \sqrt{35}$$