1. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si} \quad x<-2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ -\dfrac{1}{2}x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Escribe el o los puntos en los que la función anterior no es continua.

2. **[5 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x^3+x-1}{-3x^2+2x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}+x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}$

Nota. En el cálculo de todos y cada uno de los límites anteriores debes hacer algún paso o explicación, por breve que sea, que conduzca a la solución.

3. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2-4}$:

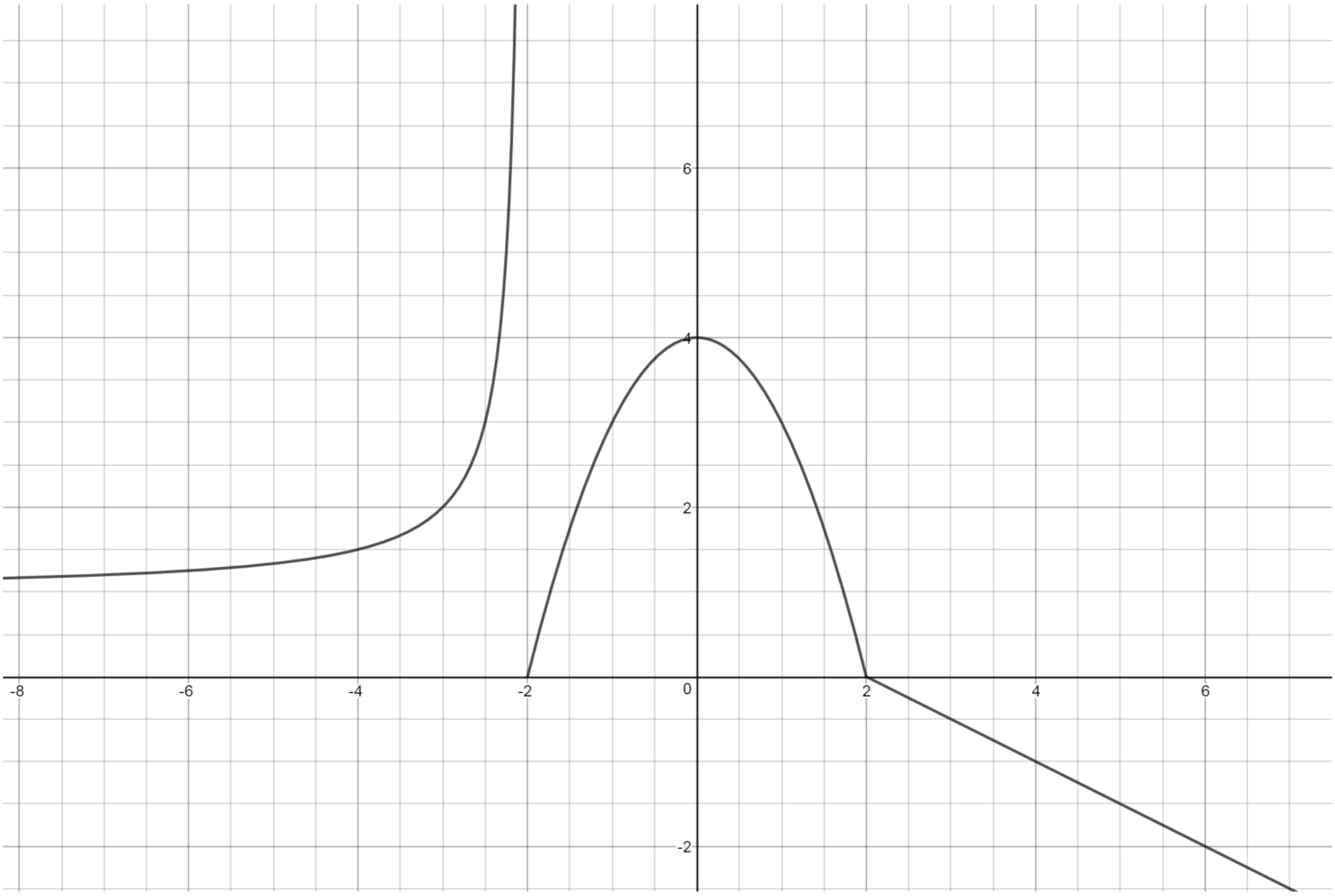
a) **[1,5 puntos]** Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

b) **[1 punto]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

c) **[0,5 puntos]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes representar previamente las asíntotas y los puntos de corte con los ejes hallados en los apartados b) y c).

Soluciones

1. Representación gráfica.



La función no es continua en $x=-2$.

2. Cálculo de límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x^3+x-1}{-3x^2+2x-3}=\left[\dfrac{-(-)^3}{-(-)^2}=\dfrac{+}{-}\right]=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}+x\right)=\left[\dfrac{1}{0}-2\right]=\begin{cases}-\infty-2=-\infty & \text{si} \quad x\to-2^-\\ +\infty-2=+\infty & \text{si} \quad x\to-2^+\end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(x-2)-x^2(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x^2-x^3-2x^2}{x^2-4}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^2}{x^2-4}=\dfrac{-4}{1}=-4$

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(x^2-1\right)-(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{x}=\dfrac{0}{1}=0$

3. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2-4}$:

a) ***Asíntotas verticales***. $x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x}{x^2-4}=\left[\frac{-6}{0}\right]=\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x\to -2^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to -2^+ \end{cases} ;\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x}{x^2-4}=\left[\frac{6}{0}\right]=\begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x\to 2^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 2^+ \end{cases}$$

Entonces $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x}{x^2-4}=\pm\infty$. Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas. $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3-x}{x^2-4}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{x^3-4x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x^2-4}=0$.

Por tanto, la asíntota oblicua es $y=x$.

b) Puntos de corte con el eje X : $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$. Se obtienen haciendo $y=0$:

$$0=\frac{x^3-x}{x^2-4}\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0\Rightarrow x=-1 ;\ x=1 \end{cases}$$

Puntos de corte con el eje Y : $(0,0)$. Se obtiene haciendo $x=0\Rightarrow y=\dfrac{0^3-0}{0^2-4}=\dfrac{0}{-4}=0$.

c) Representación gráfica.