1. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

2. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos en los puntos $x=-3$ y $x=3$. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+3} & \text{si} \quad x<-3\\ 5-x & \text{si} \quad -3\le x\le 3\\ \dfrac{-x-1}{x-5} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

3. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

   a) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

   b) $y=(x+1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)$

4. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2}$, se pide:

   a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

   c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

   d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}=\left[\text{Indeterminación } \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x+3}=\dfrac{18}{6}=3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)-(x-3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\dfrac{5}{+\infty}=0$

2. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos en los puntos $x=-3$ y $x=3$. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+3} & \text{si} \quad x<-3\\ 5-x & \text{si} \quad -3\le x\le 3\\ \dfrac{-x-1}{x-5} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to-3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{2x}{x+3}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}(5-x)=5-(-3)=8\end{cases}\right\}\Rightarrow$ no existe el límite de $f(x)$ cuando $x\to-3$ por ser distintos los límites laterales. Por tanto, f no es continua en $x=-3$. Además, como uno de los límites laterales es infinito, hay una discontinuidad de salto infinito en $x=-3$.

$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(5-x)=5-3=2\\ \lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-x-1}{x-5}=\dfrac{-3-1}{3-5}=\dfrac{-4}{-2}=2\end{cases}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to3}f(x)=2=f(3)$, y de aquí se deduce que f es continua en $x=3$.

3. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

a) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

$$y'=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot x-\sqrt{x+1}\cdot 1}{x^2}=\frac{\dfrac{x-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x^2}=\frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

b) $y=(x+1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)$

$$y'=1\cdot\ln\left(x^2-1\right)+(x+1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\ln\left(x^2-1\right)+\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\ln\left(x^2-1\right)+\frac{2x}{x-1}$$

4. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2}$, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2}=\left[\dfrac{-9}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 0^- \\ -\infty & \text{si} \quad x\to 0^+\end{cases}$. De aquí se deduce que $x=0$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2}=2$. Por tanto, $y=2$ es una asíntota horizontal.

Al tener una asíntota horizontal no tiene asíntotas oblicuas.

b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

Si $y=0$, $2x^2-3x-9=0\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2} \\ x=3\end{cases}$. Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$ y $(3,0)$.

Si $x=0$, la imagen no existe pues 0 no pertenece al dominio de la función (de hecho, hemos visto que $x=0$ es una asíntota vertical). Por tanto, no hay ningún punto de corte con el eje Y.

c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

$$f'(x)=\frac{(4x-3)x^2-(2x^2-3x-9)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{4x^3-3x^2-4x^3+6x^2+18x}{x^4}=\frac{3x^2+18x}{x^4}=\frac{3x+18}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x+18=0\Leftrightarrow 3x=-18\Leftrightarrow x=\frac{-18}{3}\Leftrightarrow x=-6$$

De lo anterior se deduce que el posible máximo o mínimo de la función es el punto $x=-6$. Confeccionemos una tabla que nos ayude a decidir.

	$(-\infty,-6)$	$(-6,0)$	$(0,+\infty)$
Signo f'	$+$	$-$	$+$
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

Resumiendo:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-6,0)$
- f presenta un máximo en $x=-6$, pues en ese punto f pasa de ser creciente a ser decreciente.

  La coordenada y del máximo es $y=\dfrac{2\cdot(-6)^2-3\cdot(-6)-9}{(-6)^2}=\dfrac{72+18-9}{36}=\dfrac{81}{36}=\dfrac{9}{4}$. Así pues, el máximo es el punto $\left(-6,\ \dfrac{9}{4}\right)=(-6,\ 2,25)$.

d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.