

1. **[4 puntos; 1 punto por apartado]** Calcular los siguientes límites **justificando, de manera razonada**, el resultado de cada uno de ellos:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 6x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 12x^3 + x - 6}{-4x^3 - 9x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 6x - 8}{x^3 - 3x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 2x^2 \right)$

2. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 16}{2x^2 - 8}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

- a) **[0,5 puntos]** Hallar el dominio de la función.
- b) **[1 punto]** Calcular los puntos de corte con los ejes.
- c) **[1,5 puntos]** Hallar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
- d) **[1 punto]** Usando los datos anteriores, realizar una representación gráfica aproximada de la función.

3. **[2 puntos]** Dada la función definida por trozos: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-13}{2x-6} & \text{si } 1 \leq x < 3, \text{ estudiar de manera} \\ -x+6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

razonada la continuidad de la función en los puntos $x=1$ y $x=3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

Soluciones

1. [4 puntos] Calcular los siguientes límites justificando, de manera razonada, el resultado de cada uno de ellos:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 6x} = \left[\frac{4 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 1}{2 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3)} = \frac{36 + 9 - 1}{18 - 18} = \frac{44}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -3^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -3^+ \end{cases}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 12x^3 + x - 6}{-4x^3 - 9x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^3 + 3x^2 + x - 6}{-4x^3 - 9x - 1} = \frac{-12}{-4} = 3. \text{ [Los grados son iguales]}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 6x - 8}{x^3 - 3x + 2} = \left[\frac{5 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 8}{(-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2} = \frac{20 - 12 - 8}{-8 + 6 + 2} = \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (5x-4)}{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x-4}{x^2 - 2x + 1} = \frac{5 \cdot (-2) - 4}{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1} = \frac{-10 - 4}{4 + 4 + 1} = \frac{-14}{9}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 2x^2) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - 2x^2) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + 2x^2)}{\sqrt{x^2 + x} + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (2x^2)^2}{\sqrt{x^2 + x} + 2x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 4x^4}{\sqrt{x^2 + x} + 2x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^4}{2x^2} = -\infty. \text{ [El grado de arriba es mayor que el grado de abajo]}$$

2. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 16}{2x^2 - 8}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

a) [0,5 puntos] Hallar el dominio de la función.

Igualemos el denominador a cero: $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Entonces, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

b) [1 punto] Calcular los puntos de corte con los ejes.

Con el eje X : $y = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 16}{2x^2 - 8} = 0 \Rightarrow 4x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-16}{4} = -4$, que no tiene solución. Por lo tanto,

la gráfica de la función no corta al eje X .

Con el eje Y : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4 \cdot 0^2 + 16}{2 \cdot 0 - 8} = \frac{16}{-8} = -2$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0, -2)$.

c) [1,5 puntos] Hallar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

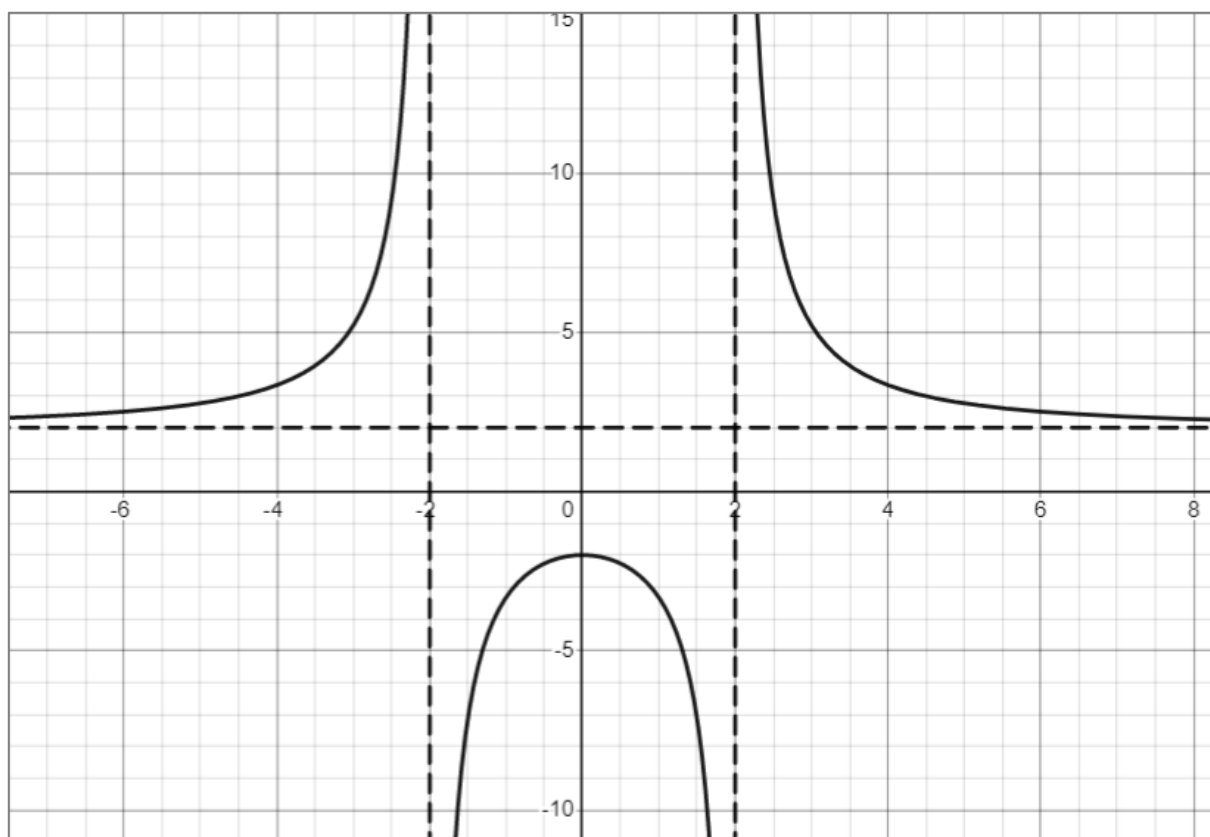
Verticales. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 16}{2x^2 - 8} = \left[\frac{32}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 16}{2x^2 - 8} = \left[\frac{32}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$. De lo

anterior se deduce que las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$.

Horizontales. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 16}{2x^2 - 8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2$. Entonces $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas. Como hay una asíntota horizontal, no hay asíntotas oblicuas.

d) [1 punto] Usando los datos anteriores, realizar una representación gráfica aproximada de la función.



3. [2 puntos] Dada la función definida por trozos $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-13}{2x-6} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ -x+6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, estudiar de manera razonada

la continuidad de la función en los puntos $x=1$ y $x=3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

- En $x=1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + x + 3) = -1 + 1 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-13}{2x-6} = \frac{1-13}{2-6} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3. \text{ Además, } f(1) = \frac{1-13}{2-6} = \frac{-12}{-4} = 3.$$

Por tanto, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$, lo que indica que f **es continua** en el punto $x=1$.

- En $x=3$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-13}{2x-6} = \frac{3-13}{6-6} = \left[\frac{-10}{0} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x+6) = -3+6 = 3 \end{aligned} \right\} \text{ Como los límites laterales son distintos, deducimos que no}$$

existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y, por tanto, f **no es continua** en $x=3$. Al ser uno de los límites infinito y el otro finito, en el punto $x=3$ hay una discontinuidad de salto infinito.