1. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos en los puntos $x=-3$ y $x=3$. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x+3} & \text{si} \quad x<-3 \\ 5-x & \text{si} \quad -3\le x\le 3 \\ \dfrac{-x-1}{x-5} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

2. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

   a) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

   b) $y=(x+1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)$

   c) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$

3. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=-2x^2-x+5$ en el punto de abscisa $x=-2$.

4. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$, se pide:

   a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

   c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

   d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x<-1 \\ -x^2+x & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ \dfrac{-x}{x-1} & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{-1+1}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(-x^2+x\right)=-(-1)^2+(-1)=-1-1=-2 \end{cases}\right\}\Rightarrow \text{no existe el límite de } f(x) \text{ cuando } x\to -1$$

por ser distintos los límites laterales. Por tanto, f no es continua en $x=-1$. Además, como uno de los límites laterales es infinito, hay una discontinuidad de salto infinito en $x=-1$.

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-x^2+x\right)=-2^2+2=-4+2=-2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x}{x-1}=\dfrac{-2}{2-1}=\dfrac{-2}{1}=-2 \end{cases}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=-2=f(2)$$

, y de aquí se deduce que f es continua en $x=2$.

2. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

a) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$; $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{x}-(x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{\dfrac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

b) $y=2x^2\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)$; $y'=4x\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)+2x^2\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=4x^2+4x\sqrt{x}+2x^2+\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x}}=$

$=6x^2+4x\sqrt{x}+\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x}=6x^2+4x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=6x^2+5x\sqrt{x}$

c) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$; $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\dfrac{2x}{2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{x}{x^2+1}$

3. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=-2x^2-x+5$ en el punto de abscisa $x=-2$.

La recta tangente a la gráfica de la función f en $x=-2$ viene dada por $y-f(-2)=f'(-2)\left(x-(-2)\right)$.

Por un lado $f(-2)=-2(-2)^2-(-2)+5=-8+2+5=-1$. Por otro lado, como $f'(x)=-4x-1$, tenemos que $f'(-2)=-4(-2)-1=8-1=7$. Por tanto, la recta tangente en $x=-2$ queda del siguiente modo:

$$y-(-1)=7(x+2)\Rightarrow y+1=7x+14\Rightarrow y=7x+13$$

4. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 1^+\end{cases}$. De aquí se deduce que $x=1$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to+\infty \\ -\infty & \text{si} \quad x\to-\infty\end{cases}$. Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x}=1 \\ \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4-\left(x^2-x\right)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3x+4}{x-1}=-3\end{array}\right\}\Rightarrow y=x-3 \text{ es la asíntota oblicua.}$$

b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

Si $y=0$, $x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$. Por tanto, el punto de corte con el eje X es el $(2,0)$.

Si $x=0$, $y=-4$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es el $(0,-4)$.

c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-\left(x^2-4x+4\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

De lo anterior se deduce que los posibles máximos o mínimos de la función son los puntos $x=0$, $x=2$. Confeccionemos una tabla que nos ayude a decidir.

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Signo f'	+	−	−	+
Monotonía	↑↑	↓↓	↓↓	↑↑

Resumiendo:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(0,1)\cup(1,2)$-
- f presenta un máximo en $x=0$. La coordenada y es $y=\dfrac{0^2-4\cdot 0+4}{0-1}=\dfrac{4}{-1}=-4$. Por tanto, el máximo es el punto $(0,-4)$ (el punto de corte con el eje Y).
- f presenta un mínimo en $x=2$. La coordenada y es $y=\dfrac{2^2-4\cdot 2+4}{2-1}=\dfrac{4-8+4}{1}=\dfrac{0}{1}=0$. Por tanto, el mínimo es el punto $(2,0)$ (el punto de corte con el eje X).

d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.