

1. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Escribe el o los puntos en los que la función anterior no es continua.

2. **[5 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x^3 + 2x}{-x^2 + 3x + 21}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^3 - 2x^2 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x^2}{3x-1} - 2x \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x-3} - \frac{x+9}{x^2-3x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 1} - 2x \right)$

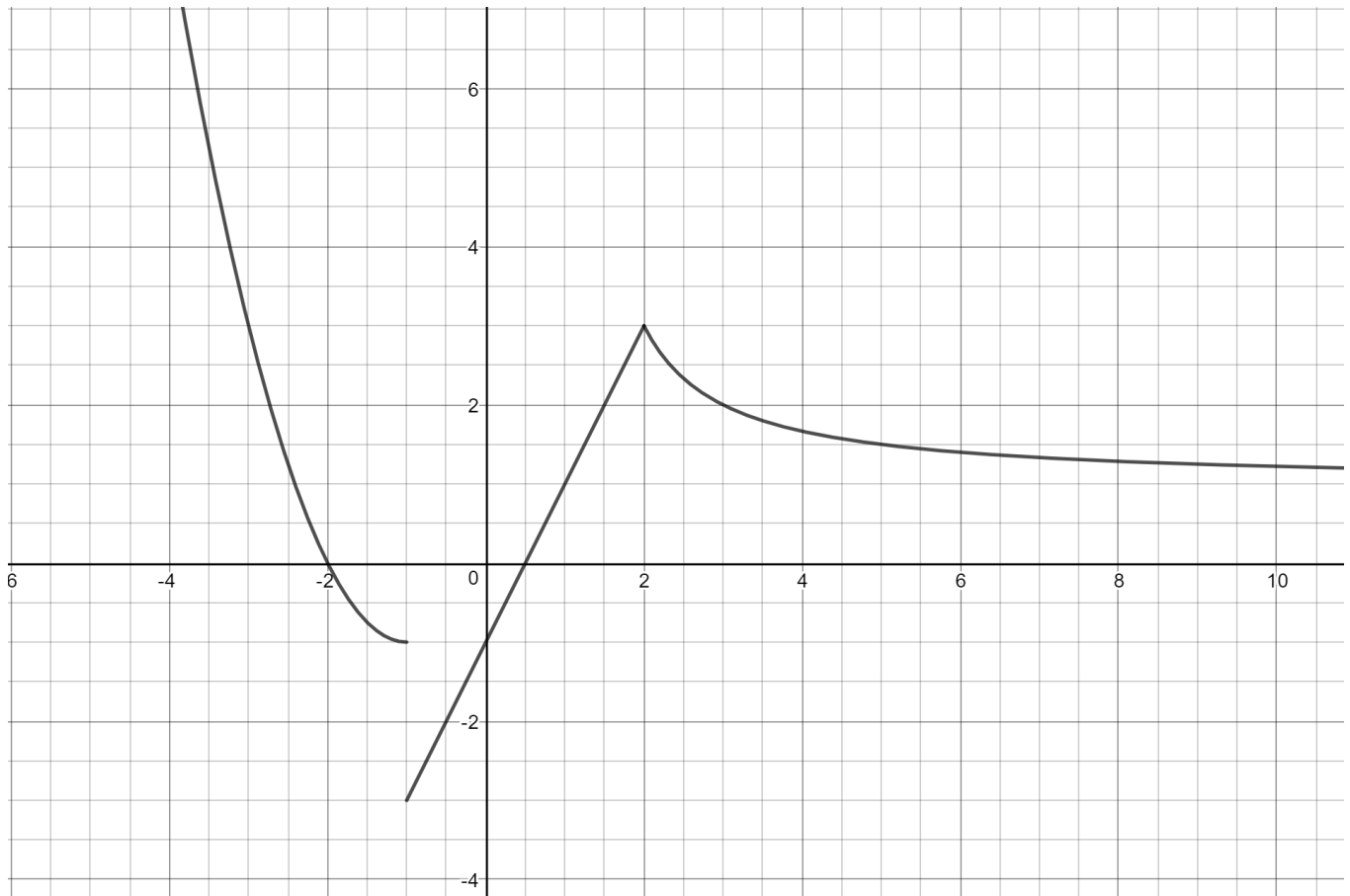
Nota. En el cálculo de todos y cada uno de los límites anteriores debes hacer algún paso o explicación, por breve que sea, que conduzca a la solución.

3. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$:

- a) **[1,5 puntos]** Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- b) **[1 punto]** Hallar los puntos de corte con los ejes.
- c) **[0,5 puntos]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes representar previamente las asíntotas y los puntos de corte con los ejes hallados en los apartados b) y c).

Soluciones

1. Representación gráfica:



La función no es continua en el punto $x = -1$.

2. Cálculo de límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x^3 + 2x}{-x^2 + 3x + 21} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{-x^2} = \left[\frac{- \cdot (-)^3}{- \cdot (-)^2} = \frac{+}{-} \right] = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x(x-1)} = \left[\frac{2}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x^2}{3x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 2x(3x-1)}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 6x^2 + 2x}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x-3} - \frac{x+9}{x^2-3x} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x-3} - \frac{x+9}{x(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x - x - 9}{x(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x-9}{x^2-3x} = \left[\frac{6}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2-1} - 2x \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2-1} - 2x)(\sqrt{3x^2-1} + 2x)}{\sqrt{3x^2-1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{3x^2-1} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{3x^2-1} + 2x} = \left[\frac{-}{+} \right] = -\infty \end{aligned}$$

3. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$:

a) **Asíntotas verticales:** $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ son asíntotas verticales.}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = 1$. Entonces $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: como hay una asíntota horizontal no puede haber asíntotas oblicuas.

b) Puntos de corte con los ejes.

Con el eje X: hacemos $y = 0$. Entonces $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Por tanto

los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $(2,0)$.

Con el eje Y: hacemos $x = 0$. Entonces $y = \frac{0^2 - 2 \cdot 0}{0^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0,0)$, que ya lo habíamos obtenido antes.

c) Representación gráfica de la función.

