

1. **[2 puntos]** Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y de segundo grado con una incógnita. Debes de dar la solución en forma de intervalo o de unión de intervalos

a) $\frac{x-2}{2} - \frac{1-x}{3} \leq x$; b) $(2x+3)(2x-3) + 5x > 2(x+1) - 1$

2. **[1 punto]** Resuelve el siguiente sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Debes representar la solución gráficamente y dar la solución del sistema en forma de intervalo.

$$\begin{cases} 2x + \frac{x}{4} \leq \frac{9}{4} - \frac{x-1}{2} \\ 2x - 1 - 2(2x+1) < 1 \end{cases}$$

3. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < -2 \\ x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1, \text{ se pide:} \\ \frac{x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) **[1 punto]** Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. Si no es continua en alguno de ellos, explica razonadamente el tipo de discontinuidad existente.

- b) **[1,5 puntos]** Representarla gráficamente.

4. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} kx - 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x-2}{3x+4} & \text{si } -2 \leq x < 2, \text{ se pide} \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) **[1 punto]** Hallar de manera razonada el valor de k para que f sea continua en $x = -2$.

- b) **[1 punto]** Estudiar su continuidad en el punto $x = 2$. Si no es continua decir el tipo de discontinuidad existente.

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

a) **[0,5 puntos]** $f(x) = -5x^4 + 6x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$

b) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x}$

c) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2$

Soluciones

1. **[2 puntos]** Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y de segundo grado con una incógnita. Debes de dar la solución en forma de intervalo o de unión de intervalos

$$a) \frac{x-2}{2} - \frac{1-x}{3} \leq x \Rightarrow 3(x-2) - 2(1-x) \leq 2x \Rightarrow 3x - 6 - 2 + 2x \leq 2x \Rightarrow 3x + 2x - 6x \leq 6 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x \leq 8 \Rightarrow x \geq -8. \text{ La solución en forma de intervalo es } [-8, +\infty).$$

$$b) (2x+3)(2x-3) + 5x > 2(x+1) - 1 \Rightarrow 4x^2 - 9 + 5x > 2x + 2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9 + 5x - 2x - 2 + 1 > 0 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 10 > 0.$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado $4x^2 + 3x - 10 = 0$.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{-3 \pm 13}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{-16}{8} = -2 \end{cases}.$$

Entonces la inecuación es equivalente a esta otra: $4\left(x - \frac{5}{4}\right)(x + 2) > 0$. Estudiemos los signos en los intervalos que dividen la recta real en tres trozos, separados por la soluciones de la ecuación

$(-\infty, -2)$	$\left(-2, \frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$
+	-	+

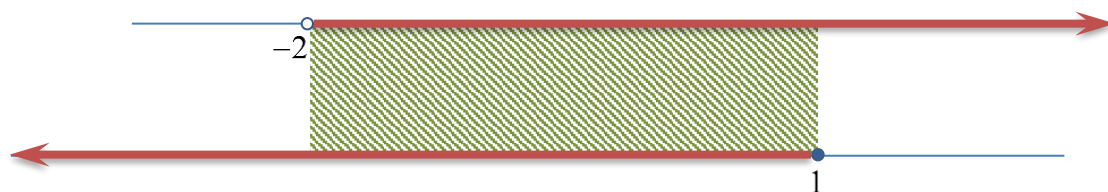
La solución es, por tanto, $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

2. **[1 punto]** Resuelve el siguiente sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Debes representar la solución gráficamente y dar la solución del sistema en forma de intervalo.

$$\begin{cases} 2x + \frac{x}{4} \leq \frac{9}{4} - \frac{x-1}{2} \\ 2x - 1 - 2(2x+1) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + x \leq 9 - 2(x-1) \\ 2x - 1 - 2(2x+1) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + x \leq 9 - 2x + 2 \\ 2x - 1 - 4x - 2 < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x + x + 2x \leq 9 + 2 \\ 2x - 4x < 1 + 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x \leq 11 \\ -2x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -2 \end{cases}$$

Solución gráfica:



Solución en forma de intervalo: $x \in (-2, 1]$.

3. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < -2 \\ x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1, \text{ se pide:} \\ \frac{x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) **[1 punto]** Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. Si no es continua en alguno de ellos, explica razonadamente el tipo de discontinuidad existente.

Continuidad en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + 4x) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x - 2) = -2 - 2 = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4 = f(-2).$$

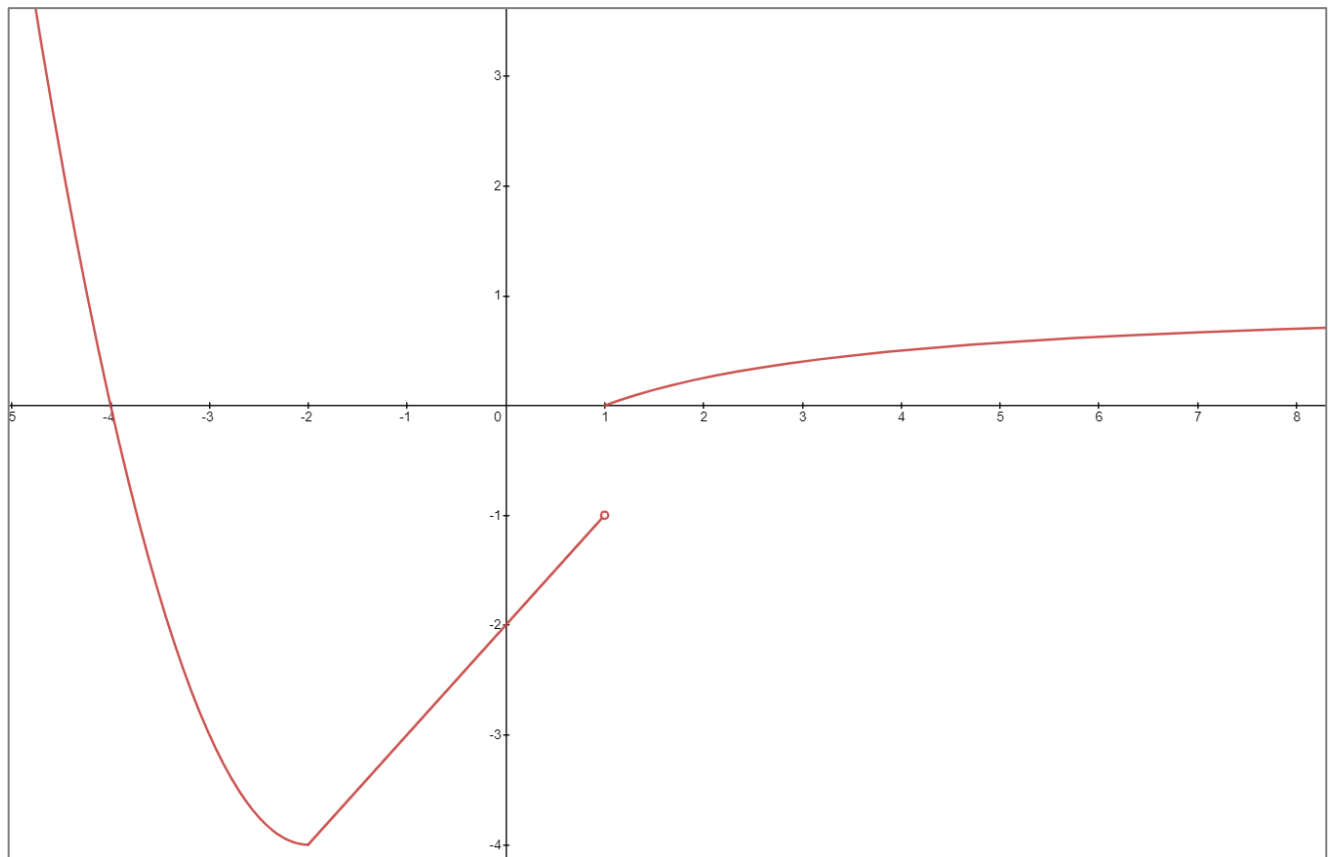
Por tanto, f es continua en $x = -2$.

Continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ con lo que } f \text{ no es continua en } x = 1. \text{ Como}$$

los límites laterales son finitos hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

- b) **[1,5 puntos]** Representarla gráficamente.



4. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} kx-2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x-2}{3x+4} & \text{si } -2 \leq x < 2, \text{ se pide} \\ x^2-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Hallar de manera razonada el valor de k para que f sea continua en $x = -2$.

Para que sea continua en $x = -2$, en primer lugar, debe existir $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$. Para ello deben existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (k \cdot (-2) - 2) = -2k - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{3x+4} = \frac{-2-2}{3 \cdot (-2)+4} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2k - 2 = 2 \Rightarrow -2k = 4 \Rightarrow k = -2.$$

Para este valor de k se cumple que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$, con lo que f será continua en $x = -2$.

b) **[1 punto]** Estudiar su continuidad en el punto $x = 2$. Si no es continua decir el tipo de discontinuidad existente.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{3x+4} = \frac{2-2}{3 \cdot 2+4} = \frac{0}{10} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 2.$$

Como los límites laterales son finitos y distintos, hay una discontinuidad de salto finito.

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

a) **[0,5 puntos]** $f(x) = -5x^4 + 6x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$.

$$f'(x) = -5 \cdot 4x^3 + 6 \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x - 3 \cdot 1 = -20x^3 + 18x^2 - 5x - 3.$$

b) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-4\sqrt{x} - x^2}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{(-4\sqrt{x} - x^2)\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{-4x - x^2\sqrt{x}}{2x^3} = \frac{-4 - x\sqrt{x}}{2x^2}.$$

c) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 = 2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot x^2 = 2x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2 = 2x^{-\frac{1}{3}+2} = 2x^{\frac{5}{3}}$. Entonces:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3} \sqrt[3]{x^2}.$$