

1. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < -2 \\ x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1, \text{ se pide:} \\ \frac{x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. Si no es continua en alguno de ellos, explica razonadamente el tipo de discontinuidad existente.

b) **[1,5 puntos]** Representarla gráficamente.

2. **[3 puntos]** Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -3 \\ -1 & \text{si } x = -3 \\ -x^2 + 6 & \text{si } -3 < x < 2 \\ \frac{3x+2}{x-3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Si no es continua en algún punto explicar de manera razonada el tipo de discontinuidad existente.

3. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} kx - 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x-2}{3x+4} & \text{si } -2 \leq x < 2, \text{ se pide} \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Hallar de manera razonada el valor de k para que f sea continua en $x = -2$.

b) **[1 punto]** Estudiar su continuidad en el punto $x = 2$. Si no es continua decir el tipo de discontinuidad existente.

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

a) **[0,5 puntos]** $f(x) = -5x^4 + 6x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$

b) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x}$

c) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2$

Soluciones

1. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < -2 \\ x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1, \text{ se pide:} \\ \frac{x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) **[1 punto]** Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. Si no es continua en alguno de ellos, explica razonadamente el tipo de discontinuidad existente.

Continuidad en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + 4x) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x - 2) = -2 - 2 = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4 = f(-2).$$

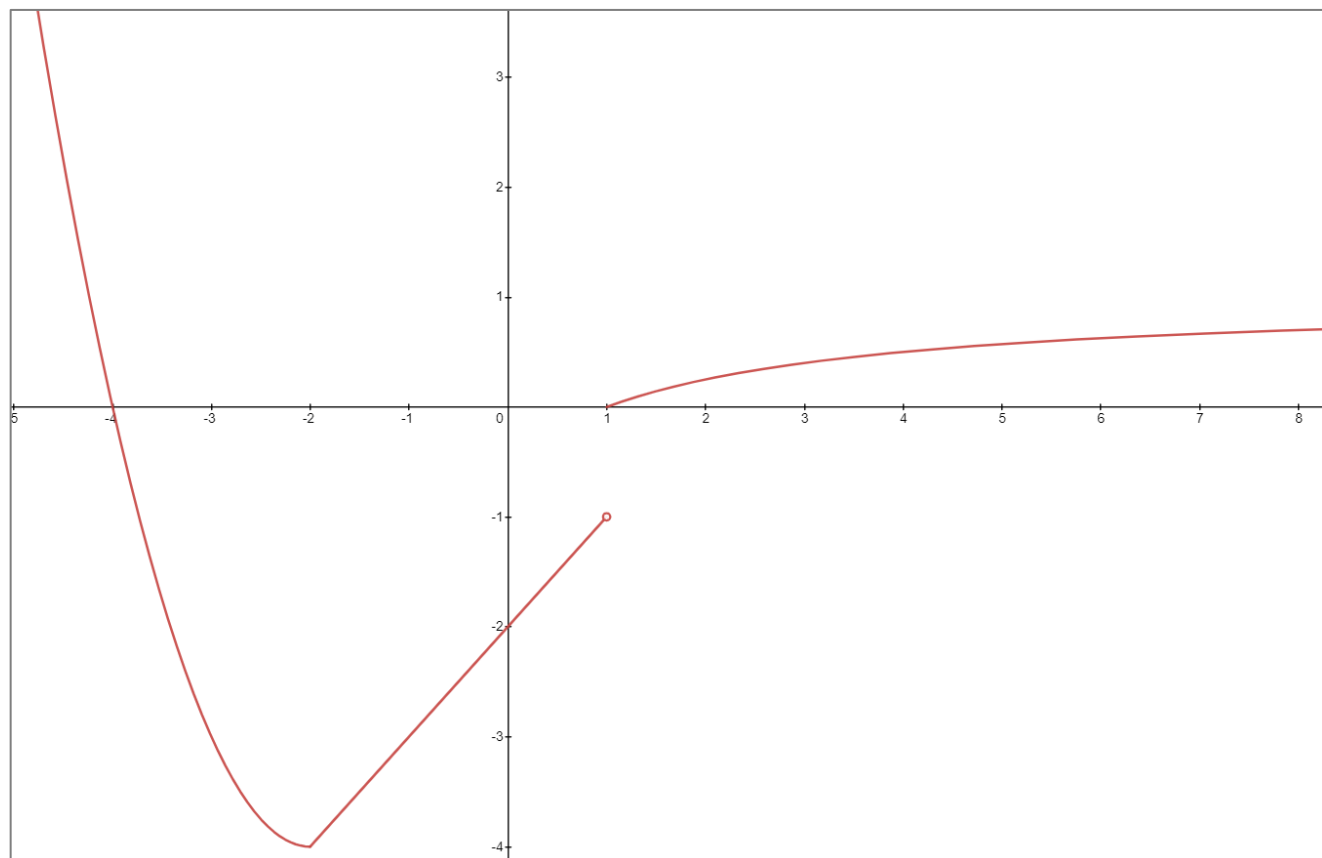
Por tanto, f es continua en $x = -2$.

Continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ con lo que } f \text{ no es continua en } x = 1. \text{ Como}$$

los límites laterales son finitos hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

- b) **[1,5 puntos]** Representarla gráficamente.



2. **[3 puntos]** Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -3 \\ -1 & \text{si } x = -3 \\ -x^2+6 & \text{si } -3 < x < 2 \\ \frac{3x+2}{x-3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Si no es continua en algún punto explicar de manera razonada el tipo de discontinuidad existente.

Los puntos singulares o críticos son $x = -3$, $x = 2$ y $x = 3$.

Continuidad en $x = -3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} (2x+3) = 2 \cdot (-3) + 3 = -6 + 3 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (-x^2+6) = -(-3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -3. \text{ Sin embargo } f(-3) = -1.$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3)$, con lo que f no es continua en $x = -3$. Hay una discontinuidad evitable.

Continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2+6) = -2^2 + 6 = -4 + 6 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-1) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 2. \text{ Al ser}$$

los límites laterales finitos y distintos, en $x = 2$ hay una discontinuidad de salto finito.

Continuidad en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+2}{x-3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3 - 3} = \left[\frac{11}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+2}{x-3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3 - 3} = \left[\frac{11}{0} \right] = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ y } f \text{ no es continua en } x = 3. \text{ Como los}$$

límites son infinitos y de distinto signo, en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito.

3. Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} kx-2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x-2}{3x+4} & \text{si } -2 \leq x < 2, \text{ se pide} \\ x^2-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Hallar de manera razonada el valor de k para que f sea continua en $x = -2$.

Para que sea continua en $x = -2$, en primer lugar, debe existir $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$. Para ello deben existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (k \cdot (-2) - 2) = -2k - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{3x+4} = \frac{-2-2}{3 \cdot (-2) + 4} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2k - 2 = 2 \Rightarrow -2k = 4 \Rightarrow k = -2. \text{ Para este valor de}$$

k se cumple que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$, con lo que f será continua en $x = -2$.

b) **[1 punto]** Estudiar su continuidad en el punto $x = 2$. Si no es continua decir el tipo de discontinuidad existente.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{3x+4} = \frac{2-2}{3 \cdot 2 + 4} = \frac{0}{10} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x = 2. \text{ Como}$$

los límites laterales son finitos y distintos, hay una discontinuidad de salto finito.

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

a) **[0,5 puntos]** $f(x) = -5x^4 + 6x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x$.

$$f'(x) = -5 \cdot 4x^3 + 6 \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x - 3 \cdot 1 = -20x^3 + 18x^2 - 5x + 3.$$

b) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-4\sqrt{x} - x^2}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{(-4\sqrt{x} - x^2)\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{-4x - x^2\sqrt{x}}{2x^3} = \frac{-4 - x\sqrt{x}}{2x^2}.$$

c) **[1 punto]** $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 = 2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot x^2 = 2x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2 = 2x^{-\frac{1}{3}+2} = 2x^{\frac{5}{3}}$. Entonces:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3} \sqrt[3]{x^2}.$$