

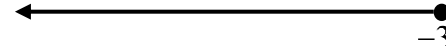
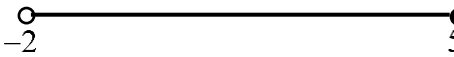
1. A) Expresa de forma analítica los siguientes intervalos de números reales y represéntalos:
a₁) Números reales menores o iguales que -3 ; a₂) Números reales mayores que -2 y menores o iguales que 5 .
B) Efectúa las siguientes operaciones con raíces y simplifica: b₁) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$; b₂) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$.
2. La caja registradora de una tienda de ropa tiene 21 billetes repartidos en billetes de 50 €, 100 € y 200 €. Además, sabemos que la caja contiene 1800 € y que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €.
 - a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos billetes de cada tipo hay en la caja.
 - b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior por el método de Gauss.
3. Halla el dominio de: a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-7x}$, c) $f(x) = \log(x+1)$, d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+9}$.
4. Representa gráficamente la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ indicando dominio, recorrido, cortes con los ejes y monotonía.
5. El consumo de gasolina de un coche, por cada 100 km recorridos, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 litros y a 90 km/h consume 7,2 litros. Usando interpolación lineal:
 - a) Obtén la expresión analítica de la función que relaciona la velocidad con el consumo.
 - b) Estima el consumo si el coche recorre 100 km a 80 km/h.
6. Obtén la función inversa de las siguientes funciones: a) $f(x) = 3x - 2$, b) $g(x) = \sqrt{x-1}$.
7. Calcula y representa gráficamente las asíntotas de las siguientes funciones: a) $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$, b) $g(x) = \frac{3x^2}{x+2}$.
8. Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
9. A) Calcula la tasa de variación media (TVM) de las siguientes funciones y explica el significado del valor que obtienes: a₁) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo $[-1, 0]$, a₂) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ en el intervalo $[-1, 0]$.
B) Obtén la función derivada de las siguientes funciones usando las reglas de derivación:
b₁) $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 1)$, b₂) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
10. La siguiente tabla muestra las notas de Matemáticas y las notas de Lengua de una clase de 1º de Bachillerato.

Notas de Matemáticas (x)	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
Notas de Lengua (y)	5	8	7	6	9	4	5	2	3	1

 - a) Representa la nube de puntos y deduce el signo de r .
 - b) Calcula $\bar{x}$ e $\bar{y}$.
 - c) Sabiendo que $\sigma_x = 2,47$; $\sigma_y = 2,45$; $\sigma_{xy} = -4,6$, calcula el coeficiente de correlación.
 - d) ¿Qué puedes decir de la relación entre las variables?
 - e) Calcula la recta de regresión de y sobre x .
 - f) Estima la nota de Lengua de un alumno que tiene un 4,5 en Matemáticas.

Nota: todos los ejercicios puntúan igual.

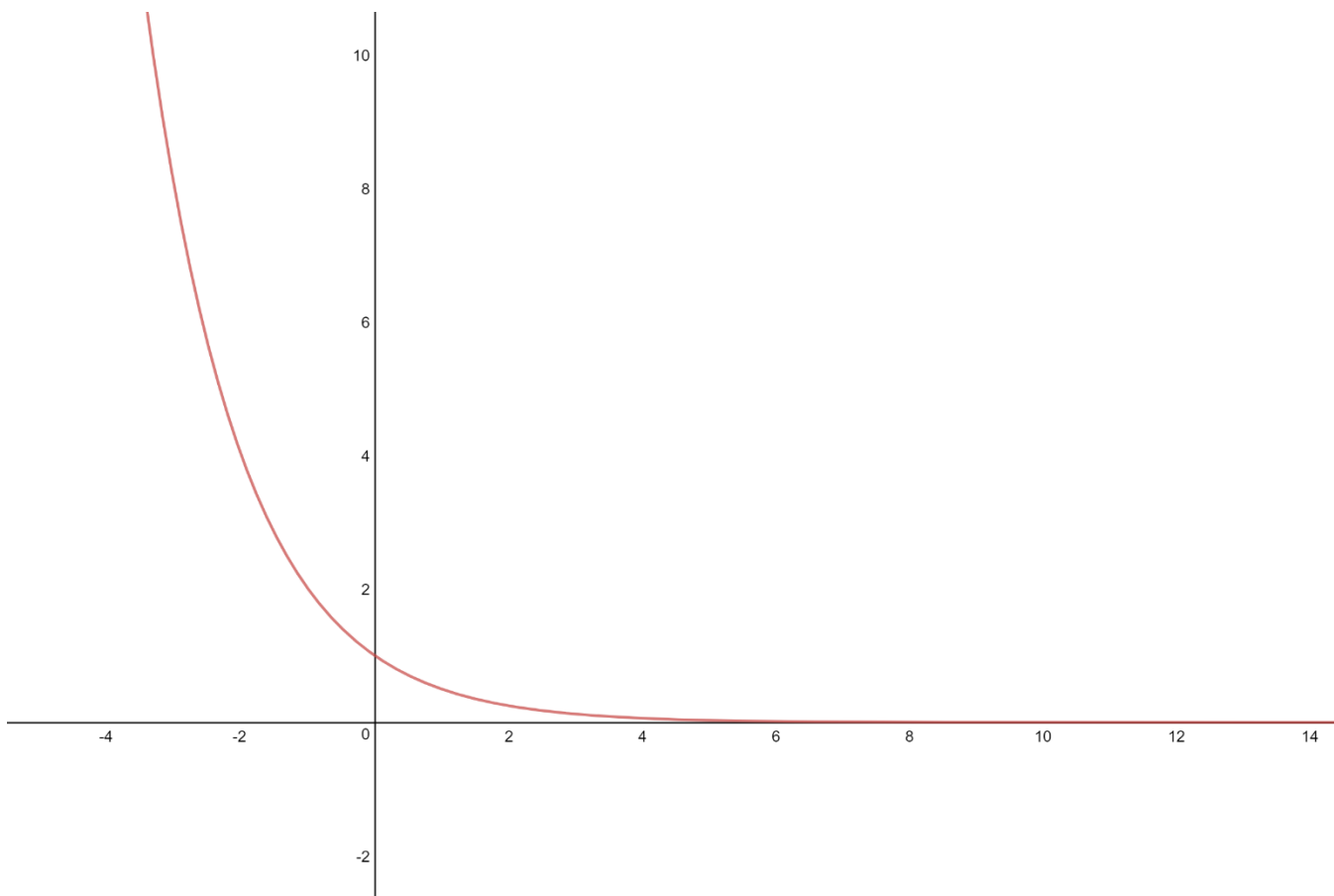
Soluciones

1. a₁) Forma analítica: $(-\infty, -3]$. Representación gráfica: 
- a₂) Forma analítica: $(-2, 5]$. Representación gráfica: 
- b₁) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (3+5-1-2)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- b₂) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{4}}{3 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{6}-2}{3 \cdot 2} = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-1}{3}$
2. Llamemos x al número de billetes de 50 €, y al número de billetes de 100 € y z al número de billetes de 200 €.
- Entonces podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ 50x + 100y + 200z = 1800 \\ x = 5z \end{cases}$$
 Si dividimos la segunda ecuación entre 50 obtenemos el siguiente sistema equivalente:
$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x + 2y + 4z = 36 \\ x - 5z = 0 \end{cases}$$
- Lo resolveremos por el método de Gauss:
- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 1 & 2 & 4 & 36 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1, f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$
- El sistema escalonado asociado a la última matriz es
$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ y + 3z = 36 \\ -3z = -6 \end{cases}$$
 cuyas soluciones son $z = 2$, $y = 9$, $x = 10$.
- Por tanto, hay 10 billetes de 50 €, 9 billetes de 100 € y 2 billetes de 200 €.
3. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Esta función solamente tiene sentido cuando $x^2 - 4 \geq 0$. Las raíces de $x^2 - 4$ son $x = -2$ y $x = 2$. Entonces la inecuación es equivalente a esta otra $(x+2)(x-2) \geq 0$. Las raíces dividen a la recta real en tres intervalos. En cada uno de ellos se puede estudiar el signo del producto $(x+2)(x-2)$. Haremos una tabla:
- | | | |
|-----------------|-----------|----------------|
| $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| + | - | + |
- Como lo que nos interesan son las partes positivas, la solución de la inecuación es: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- Por tanto: $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-7x}$. Como $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(7-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$, entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 7\}$.
- c) $f(x) = \log(x+1)$. El logaritmo de un número sólo tiene sentido si este número es mayor que cero. Entonces ha de ser $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Por tanto: $\text{Dom } f = (-1, +\infty)$.
- d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+9}$. Como $x^2 + 9 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces tiene sentido hacer la imagen de esta función para cualquier número real. Es decir: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

4. Se trata de una función exponencial de base un número comprendido entre 0 y 1. Entonces:

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$. $\text{Im } f = (0, +\infty)$. Cortes con el eje X : no tiene porque la función exponencial nunca se anula.

Cortes con el eje Y : $(0,1)$. f es decreciente en todo $\mathbb{R}$. La representación gráfica de la función es la siguiente:



5. Si consideramos los puntos $(x_0, y_0) = (60, 5,7)$, $(x_1, y_1) = (90, 7,2)$, entonces por interpolación lineal, podemos hallar el consumo para cualquier velocidad según la función $f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$, que en

nuestro caso es $f(x) = \frac{7,2 - 5,7}{90 - 60}(x - 60) + 5,7 \Rightarrow f(x) = 0,05(x - 60) + 5,7 \Rightarrow f(x) = 0,05x + 2,7$.

El consumo estimado si el coche recorre 100 km a 80 km/h es: $f(80) = 0,05 \cdot 80 + 2,7 = 6,7$ litros.

6. a) Llamemos $y = 3x - 2$. Entonces $y + 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$. Por tanto: $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$.

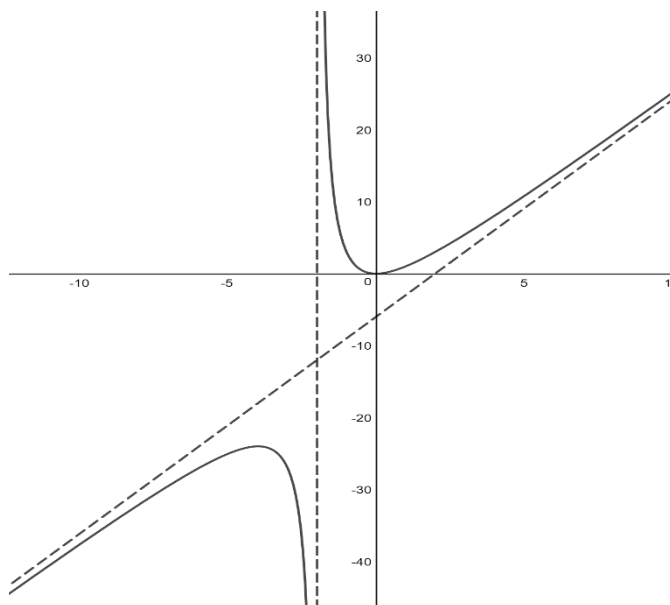
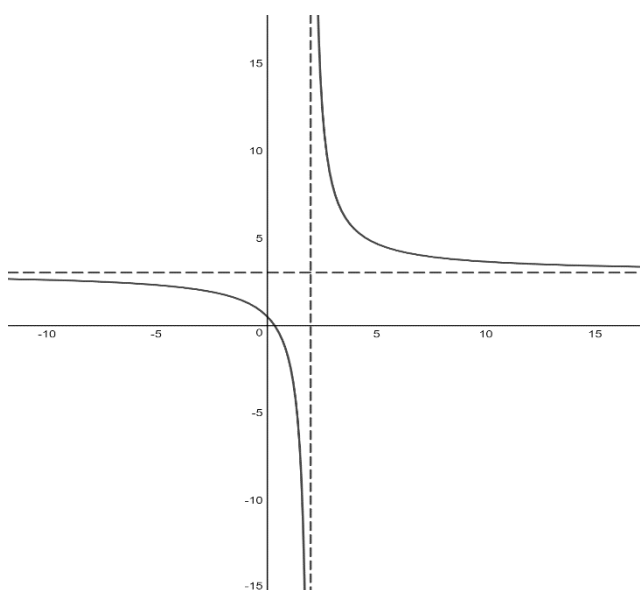
b) Llamemos $y = \sqrt{x-1}$. Entonces $y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$. Por tanto: $f^{-1}(x) = x^2 + 1$.

7. a) Como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$, $x = 2$ es una asíntota vertical, y como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-1}{x-2} = 3$, $y = 3$ es una asíntota horizontal. Al tener una asíntota horizontal, f no puede tener asíntotas oblicuas.

b) Como $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{x+2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$, $x = -2$ es una asíntota vertical, y como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x+2} = \pm\infty$, no tiene

asíntotas horizontales. Veamos si tiene oblicuas del tipo $y = mx + n$: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2x} = 3$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x+2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{x+2} = -6. \text{ Por tanto, una asíntota oblicua es } y = 3x - 6.$$



8. La función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizá, en $x = -2$ y $x = 1$.

Estudiamos la continuidad en estos dos puntos.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ por ser los límites laterales distintos. Por tanto } f \text{ no}$$

es continua en $x = -2$: hay una discontinuidad de salto finito de longitud $L = |-3 - 2| = 5$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2. \text{ Pero no existe } f(1), \text{ luego } f \text{ no es continua en } x = 1: \text{ en este}$$

punto hay una discontinuidad evitable.

9. La tasa de variación media (TVM) en un intervalo $[a, b]$ se utiliza para medir el crecimiento medio de una función

en ese intervalo. Su fórmula es $\text{TVM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. En el caso de las funciones que nos dan tenemos:

$$a_1) \text{TVM} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{12 - 21}{1} = -9; \quad a_2) \text{TVM} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1/2 - 1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

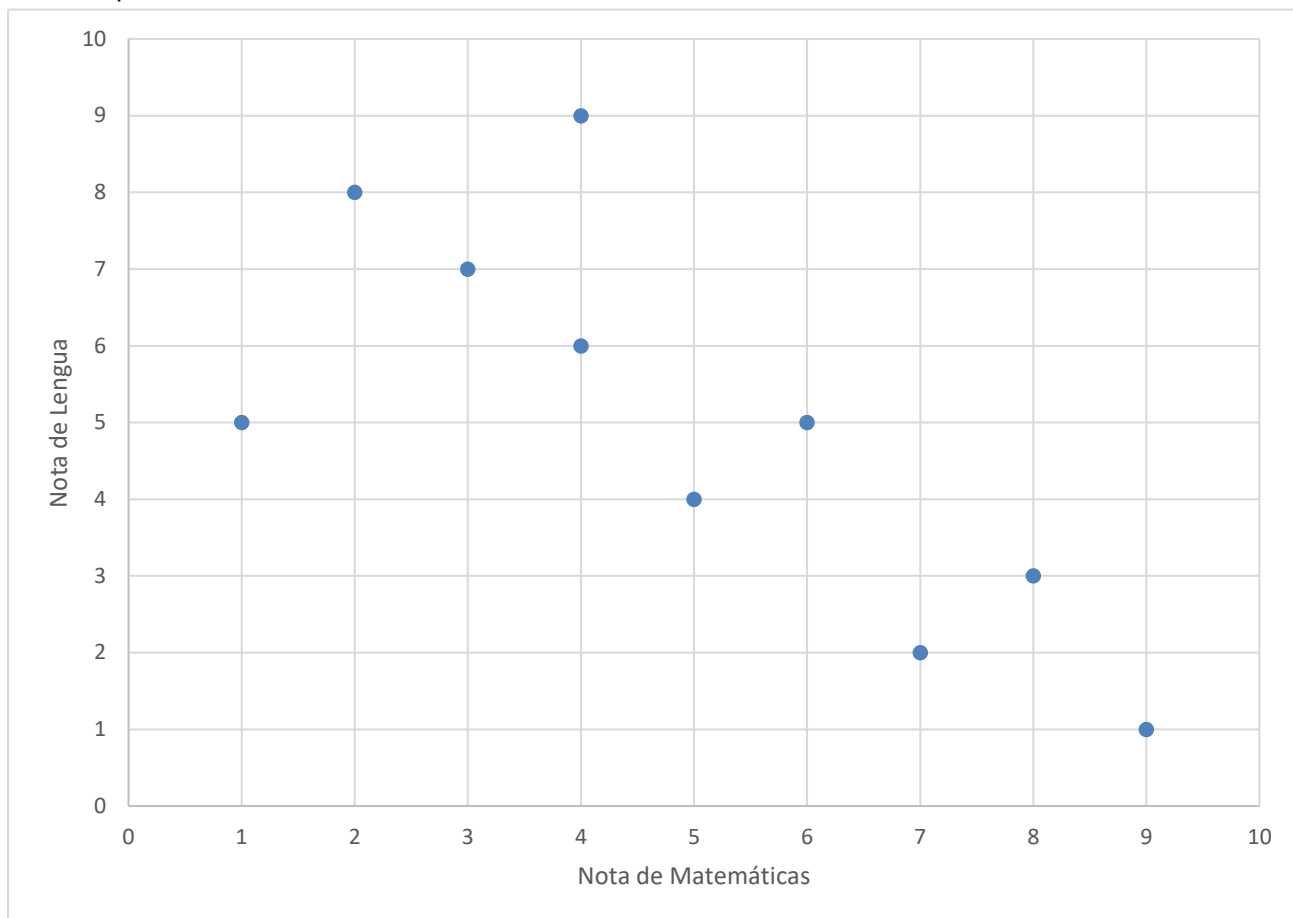
Usaremos las reglas de derivación para hacer las derivadas de las funciones que nos dan:

$$b_1) f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^2 - 5x + 1} \cdot (6x - 5) = \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 1}.$$

$$b_2) f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

10. Estadística bidimensional

a) Nube de puntos:



Se deduce claramente del gráfico anterior que el coeficiente de correlación lineal r ha de ser negativo. Esto significa que, a más nota en Matemáticas, menos nota en Lengua y viceversa.

$$b) \quad \bar{x} = \frac{1+2+3+4+4+5+6+7+8+9}{10} = \frac{49}{10} = 4,9 ; \quad \bar{y} = \frac{5+8+7+6+9+4+5+2+3+1}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

$$c) \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-4,6}{2,47 \cdot 2,45} \cong -0,76.$$

d) Podemos considerar que hay una relación fiable entre las variables por estar el coeficiente de correlación lineal mucho más cercano a -1 que a 0 .

$$e) \quad \text{Recta de regresión de } y \text{ sobre } x: y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \Rightarrow y - 5 = \frac{-4,6}{6,1} (x - 4,9) \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 5 = -0,75(x - 4,9) \Rightarrow y - 5 = -0,75x + 3,675 \Rightarrow y = -0,75x + 8,675.$$

f) Si un alumno tiene un $4,5$ ($x = 4,5$) en Matemáticas, podemos estimar, usando la recta de regresión del apartado anterior, su nota y en Lengua: $y = -0,75 \cdot 4,5 + 8,675 \Rightarrow y = 5,3$.