1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.
   a) **[1 punto]** $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+2}$
   b) **[1 punto]** $f(x)=\left(-x^2+2x\right)\cdot\left(2x^2-x+1\right)$
   c) **[1 punto]** $f(x)=\left(x^2-x\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)$
   d) **[1 punto]** $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

2. Calcular la recta tangente de las funciones siguientes en los puntos que se indican.
   a) **[1,5 puntos]** $f(x)=x^3-2x^2-x-2$ en $x=-1$.
   b) **[1,5 puntos]** $f(x)=\dfrac{x^2}{-x^2+2}$ en $x=2$.

3. Sea la función siguiente: $y=\dfrac{2}{3}x^3+x^2-4x$. Se pide:
   a) **[1 punto]** Hallar su derivada y los posibles máximos o mínimos de la función (soluciones de $y'=0$).
   b) **[1 punto]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
   c) **[0,5 puntos]** Detallar exactamente cuáles son los máximos y mínimos de la función con sus dos coordenadas.
   d) **[0,5 puntos]** Usando los datos de los apartados anteriores, hacer una representación gráfica aproximada de la función (no es necesario hacer una tabla de valores para ello).

Soluciones

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

   a) **[1 punto]** $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+2}$

   $$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot\left(x^2+2\right)-\left(x^2-x\right)\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^3+4x-x^2-2-2x^3+2x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{x^2+4x-2}{\left(x^2+2\right)^2}$$

   b) **[1 punto]** $f(x)=\left(-x^2+2x\right)\cdot\left(2x^2-x+1\right)$

   $$f'(x)=(-2x+2)\cdot\left(2x^2-x+1\right)+\left(-x^2+2x\right)\cdot(4x-1)=$$

   $$-4x^3+2x^2-2x+4x^2-2x+2-4x^3+x^2+8x^2-2x=-8x^3+15x^2-6x+2.$$

   c) **[1 punto]** $f(x)=\left(x^2-x\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)$

   $$f'(x)=(2x-1)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(x^2-x\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+1+\frac{x^2-x}{2\sqrt{x}}=$$

   $$=\frac{4x^2-4x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}+x^2-1}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-4x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}.$$

   d) **[1 punto]** $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

   $$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(1+x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\frac{\dfrac{2x-(1+x)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{2x-1-x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

2. Calcular la recta tangente de las funciones siguientes en los puntos que se indican.

   a) **[1,5 puntos]** $f(x)=x^3-2x^2-x-2$ en $x=-1$.

   La ecuación de la recta tangente es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot\left(x-(-1)\right)$.

   La derivada de f es $f'(x)=3x^2-4x-1$. Ahora calculamos $f(-1)$ y $f'(-1)$:

   $$f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2-(-1)-2=-1-2+1-2=-4\ ;\ f'(-1)=3\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-1=3+4-1=6.$$

   Entonces la recta tangente en $x=-1$ es: $y-(-4)=6\cdot(x+1)\Rightarrow y+4=6x+6\Rightarrow y=6x+2$.

   b) **[1,5 puntos]** $f(x)=\dfrac{x^2}{-x^2+2}$ en $x=2$.

   La ecuación de la recta tangente es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$.

   La derivada de f es $f'(x)=\dfrac{2x\left(-x^2+2\right)-x^2\cdot(-2x)}{\left(-x^2+2\right)^2}=\dfrac{-2x^3+4x+2x^3}{\left(-x^2+2\right)^2}=\dfrac{4x}{\left(-x^2+2\right)^2}$.

   $$f(2)=\frac{2^2}{-2^2+2}=\frac{4}{-4+2}=\frac{4}{-2}=-2\ ;\ f'(2)=\frac{4\cdot 2}{\left(-2^2+2\right)^2}=\frac{8}{(-4+2)^2}=\frac{8}{(-2)^2}=\frac{8}{4}=2.$$

   Entonces la recta tangente en $x=2$ es $y-(-2)=2\cdot(x-2)\Rightarrow y+2=2x-4\Rightarrow y=2x-6$.

3. Sea la función siguiente: $y=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x$. Se pide:

a) **[1 punto]** Hallar su derivada y los posibles máximos o mínimos de la función (soluciones de $y'=0$).

$y'=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+2x-4 \Rightarrow y'=2x^2+2x-4$. $y'=0 \Rightarrow 2x^2+2x-4=0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $x=-2$ y $x=1$ (¡compruébalo!), que son los posibles máximos o mínimos de la función.

b) **[1 punto]** Calcular y escribir con detalle los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Hacemos una tabla para estudiar el signo de la derivada:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
Signo de y'	$+$	$-$	$+$
y	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

Entonces f es <u>creciente</u> en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y <u>creciente</u> en $(-2,1)$.

c) **[0,5 puntos]** Detallar exactamente cuáles son los máximos y mínimos de la función con sus dos coordenadas.

$x=-2$ es un <u>máximo</u>. Concretamente se trata del punto $\left(-2,\frac{20}{3}\right)=(-2,\ 6,67)$.

$x=1$ es un <u>mínimo</u>. Concretamente se trata del punto $\left(1,-\frac{7}{3}\right)=(1,\ -2,33)$.

d) **[0,5 puntos]** Usando los datos de los apartados anteriores, hacer una representación gráfica aproximada de la función (no es necesario hacer una tabla de valores para ello).