Examen de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

1. **[1 punto]** Calcular, ***haciendo uso de la definición***, la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x+9}{2x^2-6}$ en el punto $x=3$.

2. **[1 punto]** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ en el punto $x=4$.

3. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo que puedas el resultado.

   a) $f(x)=\dfrac{x^3-12x+2}{x^2-7}$

   b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

   c) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$

   Nota. En la simplificación no es necesario desarrollar las potencias que puedan aparecer en el denominador.

4. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

   a) **[1 punto]** Calcular el dominio de la función, así como los puntos de corte con los ejes.

   b) **[1 punto]** Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   c) **[2 puntos]** Halla, de manera razonada, el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función. Los máximos y mínimos los debes de dar con ambas coordenadas.

   d) **[1 punto]** Usando los datos anteriores, representa gráficamente la función.

Soluciones

1. **[1 punto]** Calcular, ***haciendo uso de la definición***, la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x+9}{2x^2-6}$ en el punto $x=3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x+9}{2x^2-6}-\frac{12}{12}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x+9}{2x^2-6}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x+9}{2x^2-6}-\frac{2x^2-6}{2x^2-6}}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{-2x^2+x+15}{2x^2-6}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-2x^2+x+15}{(x-3)(2x^2-6)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(-2x-5)}{\cancel{(x-3)}(2x^2-6)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2x-5}{2x^2-6}=\frac{-11}{12}\Rightarrow f'(3)=-\frac{11}{12}.$$

2. **[1 punto]** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ en el punto $x=4$.

En primer lugar, hagamos la derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

Entonces, la derivada en $x=4$ es $f'(4)=\dfrac{4-1}{2\cdot 4\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{3}{16}$. Además, la imagen en $x=4$ es $f(4)=\dfrac{4+1}{\sqrt{4}}=\dfrac{5}{2}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=4$ es:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Rightarrow y-\frac{5}{2}=\frac{3}{16}(x-4).$$

3. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo que puedas el resultado.

a) $f(x)=\dfrac{x^3-12x+2}{x^2-7}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(3x^2-12)(x^2-7)-(x^3-12x+2)2x}{(x^2-7)^2}=$

$$=\frac{3x^4-21x^2-12x^2+84-2x^4+24x^2-4x}{(x^2-7)^2}=\frac{x^4-9x^2-4x+84}{(x^2-7)^2}.$$

b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot e^x-\ln x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{\frac{e^x-xe^x\ln x}{x}}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(1-x\ln x)}{x(e^x)^2}=\dfrac{1-x\ln x}{xe^x}.$

c) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}-\cancel{2}x\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}^2}=\dfrac{2\sqrt{x-1}-\frac{x}{\sqrt{x-1}}}{x-1}=\dfrac{\frac{2(x-1)-x}{\sqrt{x-1}}}{x-1}=$

$$=\frac{2x-2-x}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

a) **[1 punto]** Calcular el dominio de la función, así como los puntos de corte con los ejes.

Claramente, el denominador se anula cuando $x=0$. Entonces $\mathrm{Dom}\ f=\mathbb{R}-\{0\}$.

Si $x=0$, no existe la imagen de f, porque $0\notin\mathrm{Dom}\ f$. Entonces, la función no corta al eje Y.

Y si $y=0$, $\frac{x^2-2x-3}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$, cuyas soluciones son $x=-1$ y $x=3$. Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(-1,0)$ y $(3,0)$.

b) **[1 punto]** Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Se tiene que $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x-3}{x^2}=\left[\frac{-3}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 0^-\\ -\infty & \text{si } x\to 0^+\end{cases}$. Por tanto, $x=0$ (el eje Y) es una asíntota vertical.

Además, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2}=1$, por lo que $y=1$ es una asíntota horizontal.

Y como la función tiene una asíntota horizontal, entonces no tiene asíntotas oblicuas.

c) **[2 puntos]** Halla, de manera razonada, el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función. Los máximos y mínimos los debes de dar con ambas coordenadas.

$$f'(x)=\frac{(2x-2)x^2-(x^2-2x-3)2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x^3-2x^2-2x^3+4x^2+6x}{x^4}=\frac{2x^2+6x}{x^4}=\frac{2x+6}{x^3}$$

Entonces $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3$

Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos haciendo uso de una tabla orientativa:

	$(-\infty,\,-3)$	$(-3,\,0)$	$(0,\,+\infty)$
Signo de f'	+	−	+
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty,\,-3)\cup(0,\,+\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-3,\,0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x=-3$; concretamente el máximo relativo es $\left(-3,\,\frac{4}{3}\right)=(-3;1{,}33)$.

d) **[1 punto]** Usando los datos anteriores, representa gráficamente la función.