1. Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible.
[4 puntos: 1 punto por apartado. Téngase en cuenta que hacer la derivada supone 0,5 puntos y simplificar otros 0,5. Si no se deriva correctamente el apartado no puntuará nada.]

a) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{e^x - 2x}{x^3}$

c) $y = x^3 \cdot \sqrt{\ln x}$

d) $y = 2x^2 \cdot \left(\ln \sqrt{x} + x\right)$

2. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ hallar:

a) El punto a donde la derivada es igual a 11. **[0,5 puntos]**

b) La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto a hallado en el apartado anterior. **[0,5 puntos]**

3. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$ calcular:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes. **[1 punto: 0,5 puntos el dominio; 0,5 puntos los puntos de corte con los ejes]**

b) Asíntotas, tanto verticales como horizontales. Si tiene asíntotas verticales hallar la tendencia por la izquierda y por la derecha de las mismas. **[1 punto: 0,8 puntos las verticales y tendencias; 0,2 puntos las horizontales]**

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. **[1 punto]**

d) Puntos donde la gráfica de la función alcanza un máximo o un mínimo relativo. Recuerda que es obligatorio dar, de cada punto, su coordenada x y su coordenada y. **[1 punto]**

e) Representación gráfica de la función. **[1 punto]**

Ejercicio para subir nota

4. Hallar los posibles extremos relativos (puntos singulares o críticos) de la función del apartado c) del ejercicio 1. **[1 punto]**

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible.

a) $$y=\frac{x+1}{\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2x-x-1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

b) $$y=\frac{e^x-2x}{x^3}\Rightarrow y'=\frac{\left(e^x-2\right)\cdot x^3-\left(e^x-2x\right)\cdot 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\frac{x^3e^x-2x^3-3x^2e^x+6x^3}{x^6}=\frac{x^2\left(xe^x-2x-3e^x+6x\right)}{x^6}=$$

$$=\frac{xe^x-3e^x+4x}{x^4}$$

c) $$y=x^3\cdot\sqrt{\ln x}\Rightarrow y'=3x^2\cdot\sqrt{\ln x}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=3x^2\sqrt{\ln x}+\frac{x^2}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{6x^2\left(\sqrt{\ln x}\right)^2+x^2}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{6x^2\ln x+x^2}{2\sqrt{\ln x}}$$

d) $$y=2x^2\cdot\left(\ln\sqrt{x}+x\right)\Rightarrow y'=4x\cdot\left(\ln\sqrt{x}+x\right)+2x^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)=4x\ln\sqrt{x}+4x^2+2x^2\left(\frac{1}{2x}+1\right)=$$

$$=4x\ln\sqrt{x}+4x^2+x+2x^2=2x\ln x+6x^2+x\,.$$

2. $f(x)=2x^2+3x-1$

a) $f'(x)=4x+3$. Entonces el punto a cuya derivada es 11 será deberá cumplir que $f'(a)=11$, es decir, que $4a+3=11\Rightarrow 4a=8\Rightarrow a=2$.

b) La recta tangente será: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. En este caso, como $a=2$, es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$. O sea: $y-13=11(x-2)\Rightarrow y-13=11x-22\Rightarrow y=11x-9$.

3. $y=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$

a) $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=4\end{cases}$. Por tanto el dominio de la función es: Dom $f=\mathbb{R}-\{1,\ 4\}$.

El único punto de corte con los ejes es, claramente, el $(0,\ 0)$.

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x^2-5x+4}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to1^-\\-\infty & \text{si} \quad x\to1^+\end{cases}\Rightarrow x=1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x}{x^2-5x+4}=\left[\dfrac{4}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to4^-\\+\infty & \text{si} \quad x\to4^+\end{cases}\Rightarrow x=4$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-5x+4}=0\Rightarrow x=0$ (el eje X) es una asíntota horizontal.

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+4}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2-5x+4\right)-x\cdot(2x-5)}{\left(x^2-5x+4\right)^2}=\dfrac{x^2-5x+4-2x^2+5x}{\left(x^2-5x+4\right)^2}=\dfrac{-x^2+4}{\left(x^2-5x+4\right)^2}$. Entonces:

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2+4}{\left(x^2-5x+4\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+4=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-2\end{cases}$ (puntos críticos o singulares).

Hagamos una tabla dividiendo la recta real en intervalos separados entre sí por los puntos en los que no está definida la función ni su derivada, y por los puntos críticos. En cada uno de estos intervalos estudiaremos el signo de la derivada para deducir si la función crece o decrece.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
signo de f'	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$

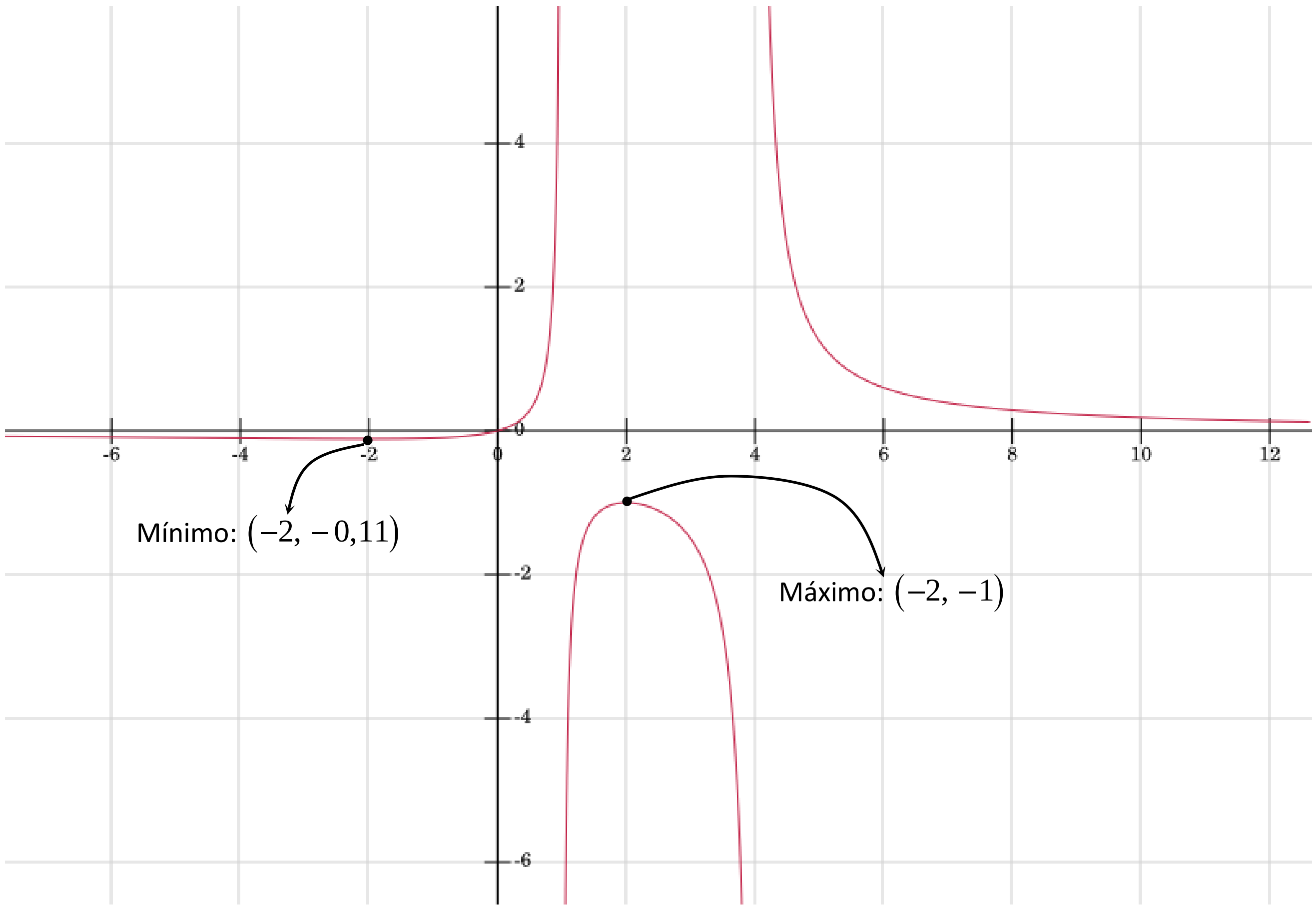
c) f es estrictamente creciente en $(-2, 1)\cup(1, 2)$.

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)\cup(2, 4)\cup(4, +\infty)$.

d) f alcanza un mínimo en $x=-2$. Concretamente, sustituyendo, en $\left(-2, -\frac{1}{9}\right)\simeq(-2, -0{,}11)$

f alcanza un máximo en $x=2$. Concretamente, sustituyendo, en $(2, -1)$.

e) Representación gráfica.



Ejercicio para subir nota

4. $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{6x^2\ln x+x^2}{2\sqrt{\ln x}}=0 \Leftrightarrow 6x^2\ln x+x^2=0 \Leftrightarrow x^2(6\ln x+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 6\ln x+1=0 \Rightarrow 6\ln x=-1 \Rightarrow \ln x=-\dfrac{1}{6} \Rightarrow x=e^{-\frac{1}{6}} \end{cases}$$