

1. **[6 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2+x}{x} - \frac{5(x-2)}{2x-1} = 8$

b) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{4} = x + \frac{2x-6}{3}$

c) $x + \sqrt{2x+3} = 6$

d) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2$

2. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + 1 - y = 0 \\ x - 1 = y - 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 \\ \frac{x-1}{y} = y-3 \end{cases}$$

Soluciones

1. [6 puntos; 1,5 puntos por apartado] Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{2+x}{x} - \frac{5(x-2)}{2x-1} = 8 \Rightarrow \frac{(2+x)(2x-1)}{x(2x-1)} - \frac{5x(x-2)}{x(2x-1)} = \frac{8x(2x-1)}{x(2x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 2 + 2x^2 - x - 5x^2 + 10x = 16x^2 - 8x \Rightarrow -3x^2 + 13x - 2 = 16x^2 - 8x \Rightarrow 19x^2 - 21x + 2 = 0.$$

El discriminante de la ecuación de segundo grado es $\Delta = (-21)^2 - 4 \cdot 19 \cdot 2 = 441 - 152 = 289$. Entonces:

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 19} = \frac{21 \pm 17}{38} = \begin{cases} x_1 = \frac{38}{38} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{38} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{19} \end{cases}$$

$$b) \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{4} = x + \frac{2x-6}{3} \Rightarrow \frac{6(x^2-1)}{12} - \frac{3(x+1)}{12} = \frac{12x}{12} + \frac{4(2x-6)}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 6 - 3x - 3 = 12x + 8x - 24 \Rightarrow 6x^2 - 3x - 9 = 20x - 24 \Rightarrow 6x^2 - 23x + 15 = 0.$$

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15 = 529 - 360 = 169. \text{ Entonces: } x = \frac{23 \pm 13}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{36}{12} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{10}{12} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6} \end{cases}.$$

$$c) x + \sqrt{2x+3} = 6 \Rightarrow \sqrt{2x+3} = 6 - x \Rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (6-x)^2 \Rightarrow 2x+3 = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0. \Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33 = 196 - 132 = 64. \text{ Entonces: } x = \frac{14 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Comprobemos: } \begin{cases} 11 + \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = 11 + \sqrt{25} = 11 + 5 = 16 \neq 6 \\ 3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3 + \sqrt{9} = 3 + 3 = 6 \end{cases}.$$

De aquí se deduce que $x = 11$ no es solución de la ecuación, pero que $x = 3$ sí que lo es.

$$d) \frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2 \Rightarrow \frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + x^2 - x - 2x + 2 = 3x + 6 - 2x^2 + 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = -2x^2 + 3x + 14 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 12 = 0.$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 25 + 144 = 169. \text{ Entonces: } x = \frac{5 \pm 13}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{18}{6} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{-8}{6} \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

2. [4 puntos; 2 puntos por apartado] Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + 1 - y = 0 \\ x - 1 = y - 2 \end{cases}$. Despejando y en la primera ecuación tenemos que $y = \frac{1}{x} + 1$. Sustituyendo este valor en la

segunda ecuación: $x - 1 = \frac{1}{x} + 1 - 2$; $x^2 - x = 1 + x - 2x$; $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Para $x = -1$ es $y = \frac{1}{-1} + 1 \Rightarrow y = -1 + 1 \Rightarrow y = 0$. Para $x = 1$ es $y = \frac{1}{1} + 1 \Rightarrow y = 1 + 1 \Rightarrow y = 2$.

Por tanto, tenemos dos soluciones del sistema: $(-1, 0)$ y $(1, 2)$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 \\ \frac{x-1}{y} = y-3 \end{cases}$. Elevando al cuadrado los dos términos de la primera ecuación: $x+y=4 \Rightarrow x=4-y$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $\frac{4-y-1}{y} = y-3 \Rightarrow \frac{3-y}{y} = y-3 \Rightarrow 3-y = y^2-3y \Rightarrow y^2-2y-3=0$.

El discriminante de esta última ecuación es $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$.

Entonces: $y = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$. Si $y = 3$, $x = 4 - 3 \Rightarrow x = 1$. Y si $y = -1$, $x = 4 - (-1) \Rightarrow x = 5$.

Por tanto, tenemos dos parejas de posibles soluciones: $(1, 3)$ y $(5, -1)$.

Hagamos la comprobación sustituyendo en la primera ecuación del sistema.

- $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, con lo que $(1, 3)$ sí que es solución.
- $\sqrt{5+(-1)} = \sqrt{4} = 2$, con lo que $(5, -1)$ también es solución.