1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = 2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x = 0$?

2. **[4,5 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $2x - \dfrac{1-2x}{3} = 3x - \dfrac{3}{x+1}$

   b) $1 + \sqrt{2-x} = \sqrt{2x+2}$

   c) $3 \cdot 2^{x+2} - 4^x - 20 = 0$

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones y expresa las soluciones en forma de pareja ordenada.

$$\begin{cases} xy - \dfrac{x}{2} = -5 \\ \dfrac{2y+3}{3} + x = 1 \end{cases}$$

4. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x^2}{3} < 4 - \frac{3x-7}{2}$$

5. **[1 punto]** *Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.* Un padre tiene 29 años, y su hija, 3. Calcular cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.

Soluciones

1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x)=2x^4-x^3-13x^2-6x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $2x^4-x^3-13x^2-6x=0$?

   Sacando x factor común tenemos que $p(x)=x\left(2x^3-x^2-13x-6\right)$. Ahora, haciendo uso de la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -13 & -6 \\ -2 & & -4 & 10 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

   Esto quiere decir que $p(x)=x(x+2)\left(2x^2-5x-3\right)$. Resolvamos ahora la ecuación de segundo grado $2x^2-5x-3=0$:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm7}{4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{12}{4}\Rightarrow x_1=3\\[2mm] x_2=-\dfrac{2}{4}\Rightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

   Por tanto, la factorización del polinomio es la siguiente: $p(x)=2x(x+2)(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

   Puesto que las soluciones de la ecuación $p(x)=0$ coinciden con las raíces del polinomio $p(x)$, las soluciones de la ecuación $2x^4-x^3-13x^2-6x=0$ son cuatro: $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=3$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

2. **[4,5 puntos]**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $2x-\dfrac{1-2x}{3}=3x-\dfrac{3}{x+1}\Rightarrow\left[\text{mcm}=3(x+1)\right]\Rightarrow3(x+1)2x-(x+1)(1-2x)=3(x+1)3x-3\cdot3\Rightarrow$

$$\Rightarrow6x^2+6x-x+2x^2-1+2x=9x^2+9x-9\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36\Rightarrow x=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{4}{2}\Rightarrow x_1=2\\[2mm] x_2=\dfrac{-8}{2}\Rightarrow x_2=-4\end{cases}.$$

   b) $1+\sqrt{2-x}=\sqrt{2x+2}\Rightarrow\left(1+\sqrt{2-x}\right)^2=\sqrt{2x+2}^2\Rightarrow1+2\sqrt{2-x}+2-x=2x+2\Rightarrow$

$$\Rightarrow2\sqrt{2-x}=2x+2-1-2+x\Rightarrow2\sqrt{2-x}=3x-1\Rightarrow\left(2\sqrt{2-x}\right)^2=(3x-1)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow4(2-x)=9x^2-6x+1\Rightarrow8-4x=9x^2-6x+1\Rightarrow9x^2-2x-7=0.\ \Delta=4+252=256.$$

$$x=\frac{2\pm16}{18}=\begin{cases}x_1=1\\[2mm] x_2=-\dfrac{7}{9}\end{cases}\cdot\begin{cases}1+\sqrt{2-1}=\sqrt{2\cdot1+2}\Rightarrow1+\sqrt{1}=\sqrt{2+2}\Rightarrow1+1=\sqrt{4}\Rightarrow2=2\\[2mm] 1+\sqrt{2+\dfrac{7}{9}}=\sqrt{2\cdot\left(-\dfrac{7}{9}\right)+2}\Rightarrow1+\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\sqrt{-\dfrac{14}{9}+2}\Rightarrow1+\dfrac{5}{3}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}\Rightarrow\dfrac{8}{3}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

   Por tanto, $x=1$ sí que es solución, pero $x=-7/9$ no es solución de la ecuación.

   c) $3\cdot2^{x+2}-4^x-20=0\Rightarrow3\cdot2^2\cdot2^x-\left(2^x\right)^2-20=0$. Llamando $z=2^x$: $12z-z^2-20=0\Rightarrow z^2-12z+20=0$

   $\Delta=12^2-4\cdot1\cdot20=144-80=64$. $z=\dfrac{12\pm8}{2}=\begin{cases}z=10\\z=2\end{cases}$. Si $z=10\Rightarrow2^x=10\Rightarrow x=\log_2 10\Rightarrow x\cong3{,}32$.

   Y si $z=2\Rightarrow2^x=2\Rightarrow x=1$.

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{2}=-5 \\ \dfrac{2y+3}{3}+x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy-x=-10 \\ 2y+3+3x=3 \end{cases}$. De la segunda ecuación: $y=\dfrac{-3x}{2}$. Sustituyendo en la primera:

$2x\dfrac{-3x}{2}-x=-10 \Rightarrow -3x^2-x=-10 \Rightarrow 3x^2+x-10=0$. Entonces:

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-10)=1+120=121 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm 11}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{3} \\ x_2=-2 \end{cases}$. Calculemos ahora las soluciones para y.

Si $x=\dfrac{5}{3} \Rightarrow y=\dfrac{-\cancel{3}\cdot\dfrac{5}{\cancel{3}}}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{5}{2}$. Y si $x=-2 \Rightarrow y=\dfrac{-3\cdot(-2)}{2} \Rightarrow y=3$.

En forma de pareja ordenada las soluciones las podemos escribir así: $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{2}\right)$ y $(-2,3)$.

4. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$\dfrac{x^2}{3}<4-\dfrac{3x-7}{2} \Rightarrow 2x^2<24-9x+21 \Rightarrow 2x^2+9x-45<0$. Como las soluciones de $2x^2+9x-45=0$ son $x=-\dfrac{15}{2}$ y $x=3$ (¡compruébese!), la inecuación es equivalente a esta otra: $2\left(x+\dfrac{15}{2}\right)(x-3)<0$. Hagamos una tabla y estudiemos los signos:

	$\left(-\infty,-\dfrac{15}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{15}{2},3\right)$	$(3,+\infty)$
$2\left(x+\dfrac{15}{2}\right)(x-3)$	**+**	**−**	**+**

De este modo, la solución en forma de intervalo es: $x\in\left(-\dfrac{15}{2},3\right)$.

5. **[1 punto]** *Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.*
Un padre tiene 29 años, y su hija, 3. Calcular cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.

Llamemos x a los años que han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.
Cuando transcurran esos años el padre tendrá $29+x$ años, y la hija tendrá $3+x$ años.
En ese momento la edad del padre es triple de la edad de su hija, con lo que podemos plantear la ecuación:

$$29+x=3(3+x)$$

Resolviéndola: $29+x=9+3x \Rightarrow x-3x=9-29 \Rightarrow -2x=-20 \Rightarrow x=10$.
Por tanto, han de transcurrir 10 años para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.