

1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x = 0$?

2. **[4,5 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-3}{3} - \frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{2} - 3$

b) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x} - 1$

c) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones y expresa las soluciones en forma de pareja ordenada.

$$\begin{cases} x^2 - \frac{xy+2}{2} = -1 \\ y - \frac{2x+5}{3} = x-2 \end{cases}$$

4. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x^2-2}{2} < x - \frac{4-x}{2}$$

5. **[1 punto]** Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.

En la actualidad, la edad de Juan es el triple que la de hermano Andrés. Dentro de 10 años Juan será cuatro años mayor que Andrés. ¿Cuántos años tienen cada uno actualmente?

Soluciones

1. [1,5 puntos] Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x = 0$?

Sacando x factor común tenemos que $p(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x = x(x^3 + x^2 - 8x - 12)$. Ahora, haciendo uso de la regla de Ruffini:

1	1	-8	-12	
-2	-2	2	12	
1	-1	-6	0	
-2	-2	6	0	
1	-3	0	0	
3	3	0	0	
1	0	0	0	

Factorización del polinomio:

$$q(x) = x(x+2)^2(x-3)$$

Soluciones de la ecuación $p(x) = 0$:

$x = 0$ (simple), $x = -2$ (doble), $x = 3$ (simple)

2. [4,5 puntos]. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-3}{3} - \frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{2} - 3 \Rightarrow [\text{mcm} = 6(x-1)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2(x-1)(2x-3) - 24 = 3(x-1)(x+1) - 18(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x-2)(2x-3) - 24 = (3x-3)(x+1) - 18(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x - 4x + 6 - 24 = 3x^2 + 3x - 3x - 3 - 18x + 18 \Rightarrow x^2 + 8x - 33 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-33) = 64 + 132 = 196 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm 14}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{-22}{2} \Rightarrow x_2 = -11 \end{cases}$$

b) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x+1}^2 = (\sqrt{2x} - 1)^2 \Rightarrow x+1 = 2x - 2\sqrt{2x} + 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2\sqrt{2x})^2 = x^2 \Rightarrow 4 \cdot (2x) = x^2 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{0+1} = \sqrt{2 \cdot 0} - 1 \Rightarrow \sqrt{1} = \sqrt{0} - 1 \Rightarrow 1 = 0 - 1 \Rightarrow 1 = -1 \\ \sqrt{8+1} = \sqrt{2 \cdot 8} - 1 \Rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{16} - 1 \Rightarrow 3 = 4 - 1 \Rightarrow 3 = 3 \end{cases}$$

Por tanto, $x = 0$ no es solución, pero $x = 3$ sí que es solución de la ecuación.

c) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 9 = 0$. Llamando $z = 3^x$: $2z^2 - 3z - 9 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 9 + 72 = 81. \quad z = \frac{3 \pm 9}{4} = \begin{cases} z = 3 \\ z = \frac{-6}{4} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Si $z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Y si $z = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3^x = -\frac{3}{2}$, que no tiene solución porque $3^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. [1,5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x^2 - \frac{xy+2}{2} = -1 \\ y - \frac{2x+5}{3} = x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy - 2 = -2 \\ 3y - 2x - 5 = 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 0 \\ -5x + 3y = -1 \end{cases}.$$

Despejando y en la segunda ecuación se tiene que $y = \frac{5x-1}{3}$. Sustituyendo en la primera:

$$2x^2 - x \cdot \frac{5x-1}{3} = 0 \Rightarrow 2x^2 - \frac{5x^2-x}{3} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 5x^2 + x = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 0 - 1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}. \text{ Y si } x = -1 \Rightarrow y = \frac{5 \cdot (-1) - 1}{3} \Rightarrow y = \frac{-6}{3} \Rightarrow y = -2.$$

En forma de pareja ordenada las soluciones las podemos escribir así: $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y $(-1, -2)$.

4. [1,5 puntos] Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x^2-2}{2} < x - \frac{4-x}{2} \Rightarrow x^2 - 2 < 2x - 4 + x \Rightarrow x^2 - 3x - 2 < 0. \text{ Como las soluciones de } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ son } x = 1$$

y $x = 2$ (¡compruébese!), la inecuación es equivalente a esta otra: $(x-1)(x-2) < 0$. Hagamos una tabla y estudiemos los signos:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-1)(x-2)$	+	-	+

De este modo, la solución en forma de intervalo es: $x \in (1, 2)$.

5. [1 punto] Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.

En la actualidad, la edad de Juan es el triple que la de hermano Andrés. Dentro de 10 años Juan será cuatro años mayor que Andrés. ¿Cuántos años tienen cada uno actualmente?

Llamemos x a los años que tiene Andrés en la actualidad. Entonces, como su la edad de su hermano Juan es el triple, Juan tiene actualmente $3x$ años.

Dentro de 10 años Andrés tendrá $x+10$ años y Juan tendrá $3x+10$ años. Según el enunciado, en ese momento Juan tendrá cuatro años más que su hermano Andrés, con lo que podemos plantear la siguiente ecuación de primer grado:

$$x+10+4 = 3x+10$$

Resolviendo la ecuación anterior:

$$x+14 = 3x+10 \Rightarrow x-3x = 10-14 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

Por tanto, Andrés tiene 2 años y su hermano Juan el triple, es decir, 6 años.