

Áreas y perímetros de figuras planas:

1. Polígonos

1. 1. Triángulos

Ejercicio propuesto 10.19: Calcula el área de un triángulo equilátero de 18 cm de perímetro.

Solución: Como es un triángulo equilátero, sabemos que sus lados son de la misma longitud, por ello, como sabemos que el perímetro es de 18cm, se cumple que dicha longitud es de: $18/3 = 6$ cm.



Para hallar su área tenemos que la base es de 6 cm pero necesitamos calcular su altura. Al ser un triángulo equilátero sabemos que su altura divide en dos partes iguales a la base:

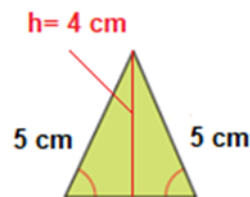


Usando el teorema de Pitágoras calculamos la altura usando el nuevo triángulo rectángulo:

$$6^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 5,19 \text{ cm}$$

Entonces: $\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{6 \cdot 5,19}{2} = 15,58 \text{ cm}^2$

Ejercicio propuesto 10.20: Calcula el área de un triángulo isósceles de 4 cm de altura y cuyos lados iguales miden 5 cm cada uno.



Necesitamos conocer la base b del triángulo, lo sí sabemos es que la altura es de 4 cm. Del mismo modo que el triángulo equilátero, el isósceles también cumple que su altura divide en dos partes iguales a la base.



Usando el teorema de Pitágoras calculamos la base del triángulo:

$$5^2 = 4^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

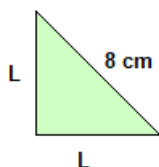
Entonces: $\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$

Ejercicio propuesto 10.21: Calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que la hipotenusa vale 8 cm.

Solución: En el enunciado nos dice que el triángulo tiene dos características:

1. Que es rectángulo, así que un ángulo es de 90°
2. Que es isósceles, es decir que dos lados son iguales.

Entonces sabemos que los lados iguales son los catetos del triángulo rectángulo, así:



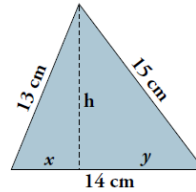
Usando el teorema de Pitágoras calculamos los catetos del triángulo:

$$8^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow 64 = 2 \cdot L^2 \Rightarrow L^2 = \frac{64}{2} = 32 \Rightarrow L = \sqrt{32} = 2\sqrt{2} = 5,66 \text{ cm}$$

Si nos fijamos en la figura, la base es el cateto L y la altura es el otro cateto L . Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{L \cdot L}{2} = \frac{L^2}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

Ejercicio propuesto 10.22: Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de h , x e y . Para luego calcular su área.



Solución: Como tenemos que $y=14-x$. Usando el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos, tenemos:

$$\begin{cases} 13^2 = h^2 + x^2 \\ 15^2 = h^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 169 = h^2 + x^2 \\ 225 = h^2 + (14-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 169 = h^2 + x^2 \\ 225 = h^2 + 196 + x^2 - 28x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 169 = h^2 + x^2 \\ 29 = h^2 + x^2 - 28x \end{cases}$$

Sistema no lineal, que resolvemos por igualación, por ejemplo:

$$\begin{cases} h^2 = 169 - x^2 \\ h^2 = 29 - x^2 + 28x \end{cases} \Rightarrow 169 - x^2 = 29 - x^2 + 28x \Rightarrow 140 = 28x \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = 169 - x^2 = 169 - 5^2 = 144 \Rightarrow h = 12 \text{ cm} \\ y = 14 - x = 9 \text{ cm} \end{cases}$$

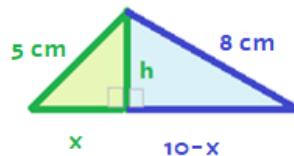
entonces: $\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 \text{ cm}^2$

Ejercicio propuesto 10.23: Calcular el área de un triángulo escaleno sabiendo que sus lados valen 5, 8 y 10 cm.

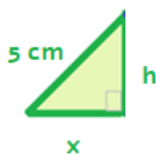
Solución:

Vamos a descomponer la figura en otras dos más sencillas, para poder trabajar más cómodamente.

En nuestro triángulo escaleno, podemos ver dos triángulos rectángulos, definidos por la altura de dicho triángulo:

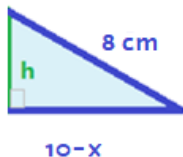


Usando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo verde:



$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 25 = h^2 + x^2$$

Usando ahora el teorema de Pitágoras sobre el triángulo azul:



$$\begin{aligned} \text{Hipotenusa}^2 &= \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 \Rightarrow 8^2 = h^2 + (10-x)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 64 = h^2 + (10-x)^2 \end{aligned}$$

Si os fijáis veréis que tengo dos ecuaciones con dos incógnitas: h y x . En este caso es un sistema no lineal. Podemos resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} 25=h^2+x^2 \Rightarrow h^2=25-x^2 \\ 64=h^2+(10-x)^2 \Rightarrow h^2=64-(10-x)^2 \end{cases} \Rightarrow 25-x^2 = 64-(10-x)^2 \Rightarrow 25-x^2 = 64-100+20x-x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 61=20x \Rightarrow x=\frac{61}{20}=3,05 \text{ cm}$$

Entonces, como: $h^2=25-x^2=25-3,05^2=15,69 \Rightarrow h=\sqrt{15,69}=3,96 \text{ cm}$, por tanto:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{10 \cdot 3,96}{2} = 19,81 \text{ cm}^2$$

1. 2. Cuadriláteros

Ejercicio propuesto 10.24: Calcula el perímetro de un cuadrado con área de 49 cm^2 .



Solución: Si calculamos el valor de su lado L, podemos hallar el valor del perímetro. Para ello usamos la poca información que tenemos:

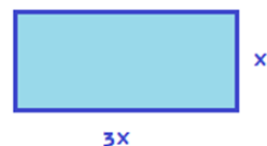
$$49 \text{ cm}^2 = \text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = L \cdot L = L^2 \Rightarrow L^2=49 \Rightarrow L=7 \text{ cm}$$

Por ello: **Perímetro** = $4 \cdot 7 = 28 \text{ cm}$

Ejercicio propuesto 10.25: El ancho de una parcela rectangular es tres veces mayor que el largo. Si el perímetro es 72 m, ¿cuál es el área?

Solución: En este caso cómo el perímetro es: 720 m, resulta que:

$$72 \text{ m} = \text{Perímetro} = 3x+3x+x+x=8x \Rightarrow 72=8x \Rightarrow x=\frac{72}{8}=9 \text{ m}$$



Ahora, ya podemos calcular el área del rectángulo:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = 9 \cdot 27 = 243 \text{ m}^2$$



Ejercicio propuesto 10.26: El abuelo quiere enmarcar una foto que tiene con sus nietos de dimensiones $50 \text{ cm} \times 70 \text{ cm}$. El cristal cuesta: 10 €/m^2 y el marco: 15 €/m . ¿Cuánto costará enmarcar la lámina?



Solución: Para enmarcar esta foto rectangular necesitamos dos materiales distintos:

1. Veamos cuanto cristal necesitamos para enmarcar esta foto, hallamos entonces el área del rectángulo:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = 50 \cdot 70 = 3500 \text{ cm}^2 = 0,35 \text{ m}^2$$

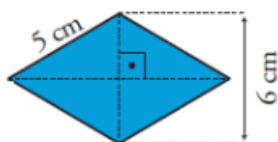
2. Ahora estudiamos cuanto material necesitamos para el marco, es decir, el perímetro del rectángulo:

$$\text{Perímetro} = 50 + 50 + 70 + 70 = 240 \text{ cm} = 2,4 \text{ m}$$

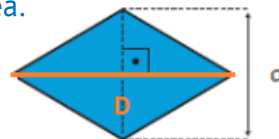
Por tanto, el precio final es: $0,35 \cdot 10 + 2,4 \cdot 15 = 39,5 \text{ €}$

Ejercicio propuesto 10.27: Calcula el área y perímetro de las figuras siguientes:

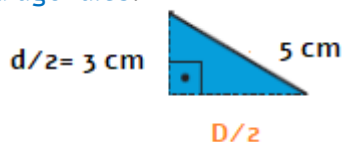
a)



Solución: Sabemos el valor de la diagonal menor, que es: $d=6 \text{ cm}$. Si hallamos el valor de la diagonal mayor D , entonces, podemos calcular el valor del área.



Entonces, usamos Pitágoras en uno de los cuatro triángulos rectángulos que definen las diagonales:

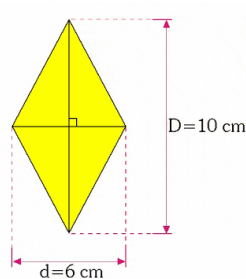


$$5^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 3^2 \Rightarrow \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \frac{D}{2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow D = 8 \text{ cm}$$

Entonces, la diagonal mayor mide 8 cm. Entonces:

$$\begin{cases} \text{Área} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2 \\ \text{Perímetro} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

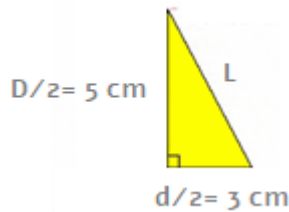
b)



Solución: En este ejercicio es muy sencillo calcular el área del rombo, ya que tenemos, las dos diagonales:

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

Pero si queremos hallar el perímetro, tenemos que trabajar para calcular el lado de este rombo. Así que recurrimos de nuevo al teorema de Pitágoras:



$$L^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \Rightarrow L = \sqrt{34} = 5,83 \text{ cm}$$

$$\text{entonces: Perímetro} = 4 \cdot 5,83 = 23,32 \text{ cm}$$

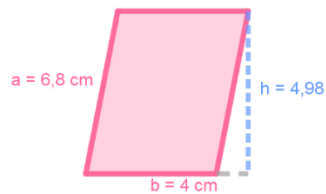
Ejercicio propuesto 10.28: Calcula la diagonal mayor de un rombo sabiendo que su área es de 225 m² y que la diagonal menor mide 30 m.

Solución: Tenemos como dato el área del rombo, que vale 225 , y la diagonal menor d= 30, entonces:

$$\text{Área} = \frac{\text{diagonal menor} \cdot \text{Diagonal mayor}}{2} = \frac{d \cdot D}{2} = \frac{30 \cdot D}{2} = 225 \text{ m}^2 \Rightarrow D = 15 \text{ m}$$

La diagonal mayor es de longitud 15 m.

Ejercicio propuesto 10.29: Calcula el área y perímetro de la figura siguiente:



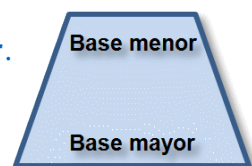
Solución: Para calcular el área, necesitamos su base y su altura, datos que nos dan directamente en el enunciado, h=4,98 cm y b=4 cm respectivamente. Y tenemos además las longitudes de todos su lados. Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = 4 \cdot 4,98 = 19,92 \text{ cm}^2 \\ \text{Perímetro} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6,8 = 21,6 \text{ cm} \end{array} \right.$$

B. Trapecios

Los trapecios son cuadriláteros:

- Con dos **lados paralelos** llamados **base mayor** y **base menor**.
- Dos lados que no son paralelos.

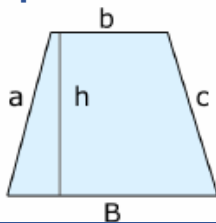


Podemos considerar tres tipos de trapecios



- **isósceles:** tiene los lados no paralelos de la misma medida, dos ángulos interiores agudos iguales en una base y dos ángulos interiores obtusos iguales en la otra base.
- **rectángulo:** cuando tiene dos ángulos interiores consecutivos rectos.
- **escaleno:** sus cuatro ángulos interiores son diferentes.

Trapecio: Cuadrilátero con sólo dos lados paralelos.



Elementos:

$b \rightarrow$ Base menor

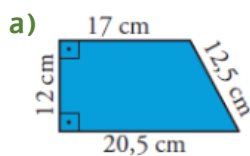
$B \rightarrow$ Base mayor

a y $c \rightarrow$ Lados oblicuos

$$\text{Área} = \left(\frac{b + B}{2} \right) \cdot h$$

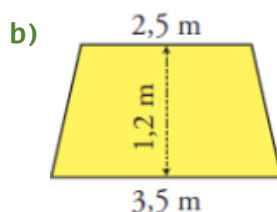
$$\text{Perímetro} = a + c + B + b$$

Ejemplos: Calcula el área y perímetro de las figuras siguientes:



En este ejercicio la altura coincide con una de sus lados oblicuos. Así tenemos todos los datos de trapecio, y podemos calcular:

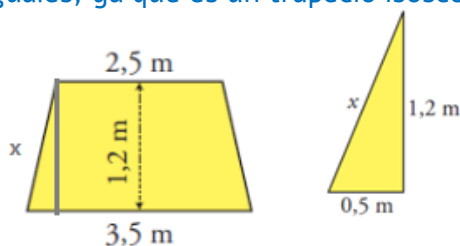
$$\begin{cases} \text{Área} = \left(\frac{b + B}{2} \right) \cdot h = \left(\frac{17 + 20,5}{2} \right) \cdot 12 = 2520 \text{ cm}^2 \\ \text{Perímetro} = 12 + 12,5 + 17 + 20,5 = 62 \text{ cm} \end{cases}$$



Con los datos que nos dan, podemos hallar el área directamente:

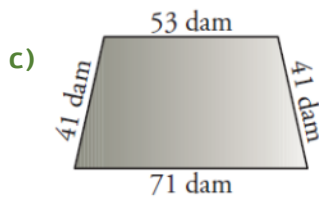
$$\text{Área} = \left(\frac{b + B}{2} \right) \cdot h = \left(\frac{2,5 + 3,5}{2} \right) \cdot 1,2 = 3,6 \text{ m}^2$$

Para calcular su perímetro, necesitamos calcular sus lados oblicuos, que en este caso son iguales, ya que es un trapecio isósceles.



$$x^2 = 1,2^2 + 0,5^2 \Rightarrow x = \sqrt{1,2^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,69} = 1,3 \text{ m}$$

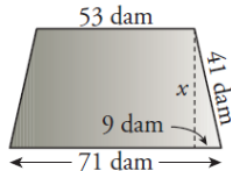
$$\text{Ahora: Perímetro} = 1,3 + 1,3 + 2,5 + 3,5 = 8,6 \text{ m}$$



Tenemos los datos suficientes para hallar el perímetro:

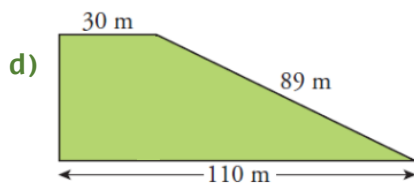
$$\text{Perímetro} = 41 + 41 + 53 + 71 = 206 \text{ dam}$$

Para calcular su área, necesitamos calcular su altura, otra vez usando el teorema de Pitágoras:

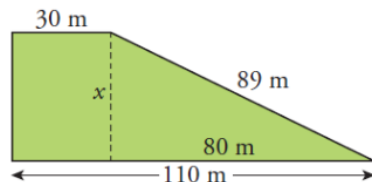


$$41^2 = 9^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40 \text{ dam}$$

Así: $\text{Área} = \left(\frac{53 + 71}{2}\right) \cdot 40 = 2480 \text{ dam}^2$



Nos hace falta hallar la altura de este trapecio rectángulo, que coincide con uno de sus lados, así:

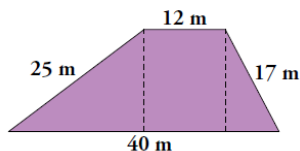


Usando el teorema de Pitágoras:

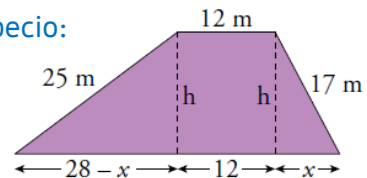
$$89^2 = 80^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39 \text{ m},$$

entonces: $\begin{cases} \text{Área} = \left(\frac{30 + 110}{2}\right) \cdot 39 = 2730 \text{ m}^2 \\ \text{Perímetro} = 39 + 89 + 30 + 110 = 268 \text{ m} \end{cases}$

Ejemplo: Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.



Tenemos la que calcular los siguientes elementos del trapecio:



Usando el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos, tenemos:

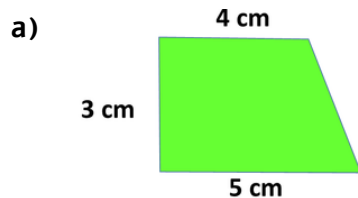
$$\begin{cases} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 289 = h^2 + x^2 \\ 625 = h^2 + 784 + x^2 - 56x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 289 = h^2 + x^2 \\ -159 = h^2 + x^2 - 56x \end{cases}$$

Sistema no lineal (para eso lo trabajamos en el tema de sistemas), que resolvemos por reducción:

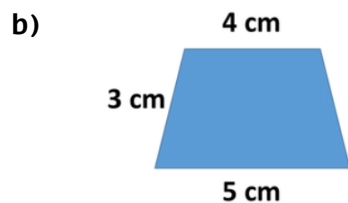
$$\begin{cases} 289 = h^2 + x^2 \\ -159 = h^2 + x^2 - 56x \\ \hline 448 = 56x \end{cases} \Rightarrow x = 8 \text{ m} \Rightarrow h^2 = 289 - x^2 = 289 - 8^2 = 225 \Rightarrow h = 15 \text{ m}$$

entonces: $\text{Área} = \left(\frac{40 + 12}{2} \right) \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$

Ejercicio propuesto 10.30: Calcula el área y perímetro de las figuras siguientes:

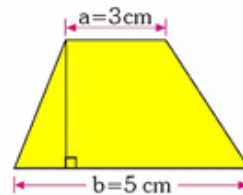


Solución: Área = 13,5 m² , Perímetro = 15,2 cm.



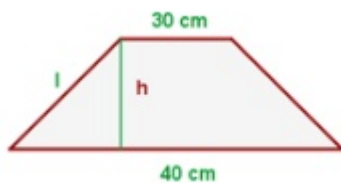
Solución: Área = 13,27 m² , Perímetro = 15 cm.

Ejercicio propuesto 10.31: Sabiendo que el área del siguiente trapecio es de 8 cm². Calcula su altura.



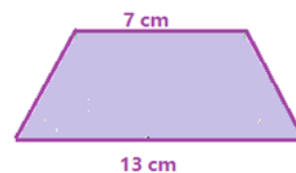
Solución: Altura= 2 cm.

Ejercicio propuesto 10.32: El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 cm, las bases miden 40 y 30 cm. Calcula el valor de l y área del trapecio.



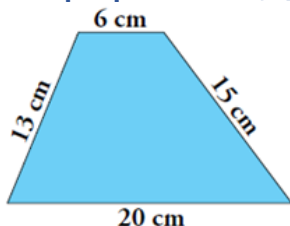
Solución: Área = 677,77 cm² , l = 20 cm.

Ejercicio propuesto 10.33: Calcula el área del trapecio isósceles, sabiendo que su perímetro es de 30 cm:



Solución: Área= 40 cm².

Ejercicio propuesto 10.34: Halla la altura y el área del trapecio siguiente:



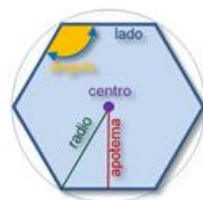
Solución: Altura= 12 cm Área=156 cm²

1. 3. Polígonos regulares de más de 4 lados

Polígonos regulares: Son aquellos polígonos con todos sus ángulos y lados son iguales.

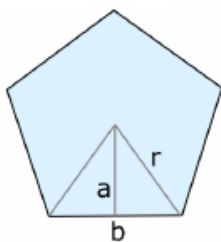
Elementos de un polígono regular

- **Centro:** punto interior que equidista de cada vértice.
- **Radio:** segmento que va del centro a cada vértice.
- **Apotema:** distancia del centro al punto medio de un lado.



Polígono regular

Polígono regular de n lados:



Elementos:

$b \rightarrow$ Lado del polígono

$r \rightarrow$ Radio del polígono

$a \rightarrow$ Apotema del polígono

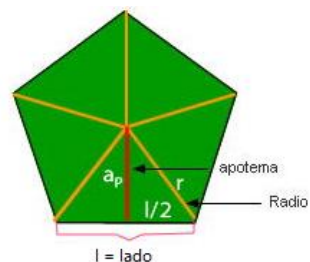
$n \rightarrow$ Número de lados del polígono

$$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot a}{2}$$

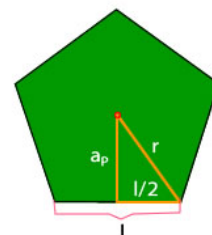
$$\text{Perímetro} = n \cdot b$$

Ojo:

1. Para calcular el área o el perímetro de un polígono regular se divide este en triángulos rectángulos uniendo el centro con cada uno de los vértices. La altura de cada uno de los triángulos coincide con la apotema del polígono.

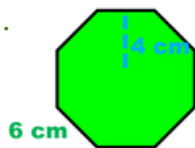


2. Si trabajamos con uno de los triángulos rectángulos, podemos relacionar el lado, el radio y su apotema, usando el teorema de Pitágoras:



3. Recordemos que en un hexágono el lado y el radio coinciden.

Ejemplo: Calcula el área y perímetro de un octágono regular que mide 6 cm de lado por 4 cm de apotema.



El octágono es un polígono en de 8 lados por tanto el perímetro es:

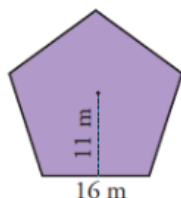
$$\text{Perímetro} = 8 \cdot L = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}$$

Para calcular su área, sólo necesitamos el perímetro y su apotema, que sí tenemos:

$$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{48 \cdot 4}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

Ejemplos: Calcula el área y perímetro de las figuras siguientes:

a)



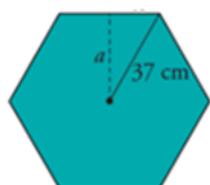
Como sabemos la longitud de su lado, podemos hallar fácilmente el valor del perímetro de este pentágono:

$$\text{Perímetro} = 5 \cdot L = 5 \cdot 16 = 80 \text{ m}$$

Para calcular su área, sólo necesitamos el perímetro y su apotema, que sí tenemos:

$$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{80 \cdot 11}{2} = 440 \text{ m}^2$$

b)



Tenemos que trabajar con un hexágono y sabemos que en este polígono la longitud de su lado es igual al radio, entonces como el radio es $r = 37 \text{ cm}$, el perímetro será:

$$\text{Perímetro} = 6 \cdot L = 6 \cdot 37 = 222 \text{ cm}$$

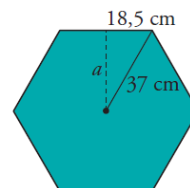
Sin embargo, calcular su área, nos hace falta conocer la longitud de su apotema. Además sabemos que la apotema divide en dos siempre al lado del polígono. Así tenemos que:

Y recurrimos, como siempre, al teorema de Pitágoras:

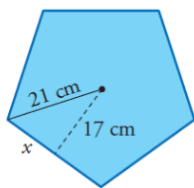
$$37^2 = 18,5^2 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{37^2 - 18,5^2} = \sqrt{1026,75} = 32,04 \text{ cm},$$

entonces:

$$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{222 \cdot 32,04}{2} = 3556,44 \text{ cm}^2$$



c)



De este pentágono sabemos el radio: $r=21$ cm y su apotema: $a=17$ cm. Así, con Pitágoras podemos hallar la mitad de su lado, como muestra la figura:

$$21^2 = 17^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{21^2 - 17^2} = \sqrt{152} = 12,32 \text{ cm}$$

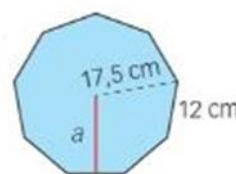
Por ello, el lado de este pentágono es de longitud: $L = 2 \cdot x = 2 \cdot 12,32 = 24,64$ cm. Entonces, tenemos:

$$\text{Perímetro} = 5 \cdot L = 5 \cdot 24,64 = 123,2 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{123,2 \cdot 17}{2} = 1047,2 \text{ cm}^2$$

Ejemplo: Calcula el área y perímetro de la figura:



De este polígono de 9 lados sabemos el radio: $r=17,5$ cm y su lado: $L=12$ cm. Así, usando Pitágoras podemos hallar la mitad de su apotema:

$$17,5^2 = 6^2 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{17,5^2 - 6^2} = \sqrt{270,25} = 16,43 \text{ cm}$$

Entonces:

$$\text{Perímetro} = 9 \cdot L = 9 \cdot 12 = 108 \text{ cm}$$

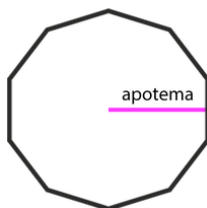
$$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{108 \cdot 16,43}{2} = 887,22 \text{ cm}^2$$

Ejercicio propuesto 10.35: El radio de un hexágono regular mide 8. Calcula su apotema y su área.



Solución: Apotema= 6,92 cm Área=166,08 cm²

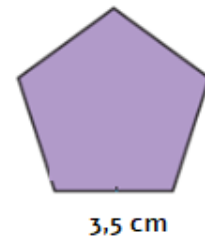
Ejercicio propuesto 10.36: Calcula el área de un decágono regular de apotema 9,23 cm y perímetro 60 cm.



Solución: Área=276,9 cm²

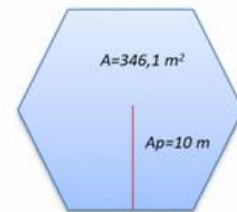
Ejercicio propuesto 10.37: El radio de la circunferencia circunscrita del siguiente pentágono regular mide 3 cm. Calcula la apotema y el área del pentágono.

Solución: Apotema= 2,43 cm Área=21,26 cm²



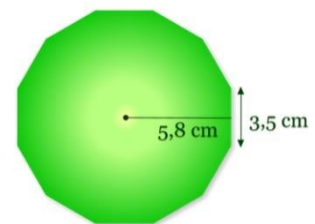
Ejercicio propuesto 10.38: Calcula el perímetro del hexágono siguiente:

Solución: Perímetro = 69,22 m



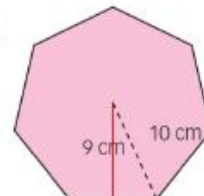
Ejercicio propuesto 10.39: Calcula el área del siguiente polígono regular:

Solución: Área= 121,8 cm²



Ejercicio propuesto 10.40: Calcula el perímetro y el área de la figura siguiente:

Solución: Perímetro= 60,97 cm Área=274,365 cm²



Ejercicio propuesto 10.41: Calcula el área y perímetro de la figura:

Solución: Perímetro = 24,18 m Área=42,315 m²

