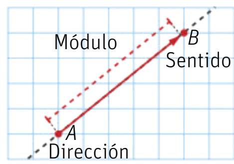
MOVIMIENTOS EN EL PLANO

VECTORES



Componentes de un vector

$A(a_1, a_2); B(b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

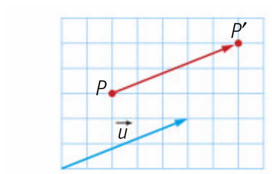
Suma de vectores

$\vec{u} = (u_1, u_2) ; \vec{v} = (v_1, v_2) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

TRASLACIONES

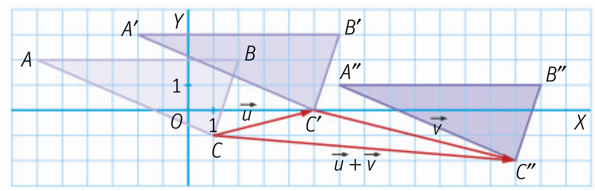
Una **traslación de vector** $\vec{u}$ es un movimiento en el plano tal que cada punto P se transforma en otro punto P' de forma que los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PP'}$ son **equipolentes**.

- $\vec{u} = \overrightarrow{PP'} = P' - P$
- $P' = P + \vec{u}$
- $P = P' - \vec{u}$



Producto de traslaciones

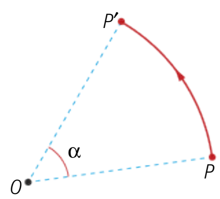
El producto de traslaciones de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con la traslación de vector $\vec{u} + \vec{v}$.



GIROS

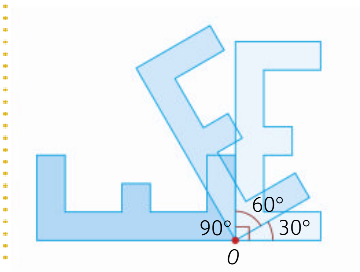
Un **giro de centro** O **y amplitud** α es un movimiento en el plano que transforma cada punto P en su homólogo P', que verifica:

- $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OP'}|$
- $\widehat{POP'} = \alpha$

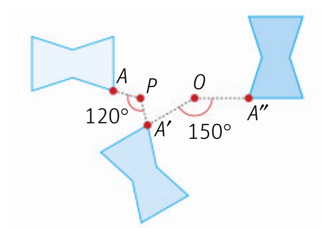


Producto de giros

Con el mismo centro



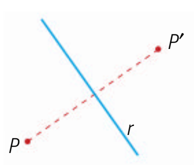
Con distinto centro



SIMETRÍAS

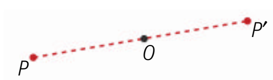
Simetría axial de eje *r*

A cada punto P le corresponde un homólogo P', siendo r la mediatriz del segmento PP'.



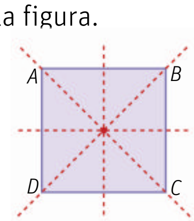
Simetría central de centro *O*

A cada punto P le corresponde un homólogo P', siendo O el punto medio del segmento PP'.



Ejes y centro de simetría

- Una recta es un **eje de simetría** de una figura cuando cada homólogo respecto de la recta pertenece también a la figura.
- Un punto es **centro de simetría** cuando cada homólogo respecto del punto pertenece también a la figura.



MOVIMIENTOS INVERSOS

El **movimiento inverso** de:

- Una traslación de vector $\vec{u}$ es otra traslación de vector $-\vec{u}$.
- Un giro de centro O y amplitud α es otro giro de centro O y de amplitud $-\alpha$.
- Una simetría axial o central es el mismo movimiento.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Vectores

ACTIVIDAD RESUELTA

22. Dados los puntos $A(2, -3)$, $B(-2, 0)$ y $C(-2, -2)$, calcula las componentes de los vectores:

a) $\vec{AB}+\vec{AC}$ b) $2\vec{AB}-3\vec{AC}$

Las componentes de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son:

$$\vec{AB}=(-2-2, 0-(-3))=(-4, 3)$$

$$\vec{AC}=(-2-2, -2-(-3))=(-4, 1)$$

Entonces:

a) $\vec{AB}+\vec{AC}=(-4, 3)+(-4, 1)=(-8, 4)$

b) $2\vec{AB}-3\vec{AC}=2(-4, 3)-3(-4, 1)=$
$=(-8, 6)-(-12, 3)=(4, 3)$

23. Dados los puntos $A(2, -4)$, $B(-2, 3)$ y $C(-2, 4)$, calcula las coordenadas de los vectores:

a) $\vec{AB}+\vec{CB}$ b) $3\vec{AB}+2\vec{AC}$ c) $-2\vec{BC}+4\vec{AC}$

24. Dados $A(-5, 4)$, $B'(-1, -2)$ y $\vec{u}=(0, 3)$:

a) Calcula las coordenadas del punto A' tal que $\vec{AA'}=\vec{u}$.

b) Calcula las coordenadas del punto B tal que $\vec{BB'}=\vec{u}$.

25. Dados los puntos $A(1, -2)$, $B(-3, 3)$, $C(-5, 2)$, $P(-2, 2)$ y $Q(-1, 0)$, calcula las coordenadas de los puntos A', B' y C' tales que $\vec{AA'}=\vec{BB'}=\vec{CC'}=\vec{PQ}$. Representa los vectores gráficamente.

26. Dados los puntos $A'(2, -3)$, $B'(3, -4)$, $C'(-3, 0)$ y el vector $\vec{u}=(0, 1)$, calcula las coordenadas de los puntos A, B y C tales que $\vec{AA'}=\vec{BB'}=\vec{CC'}=\vec{u}$. Representa los vectores gráficamente.

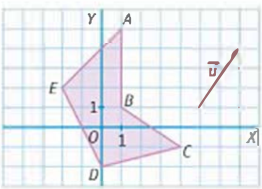
Traslaciones

27. Calcula los puntos homólogos en las traslaciones que se indican.

a) Homólogo del punto $P(-3, 4)$ en la traslación de vector $\vec{u}=(-3, 2)$.

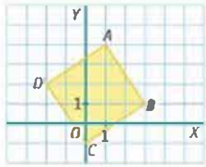
b) Homólogo de $Q(0, -4)$ en la traslación de vector $\vec{AB}$ siendo $A(-1, 1)$ y $B(-3, 5)$.

28. Halla en tu cuaderno, de forma gráfica y numérica, los vértices homólogos del pentágono $ABCDE$ en la traslación de vector $\vec{u}$.



29. Aplica al cuadrado $ABCD$ una traslación de vector $\vec{AB}$ y después, al resultado, una traslación de vector $\vec{BC}$.

¿Qué ocurre si aplicas primero la traslación de vector $\vec{BC}$ y después la traslación de vector $\vec{AB}$? ¿A qué movimiento equivale el producto de las dos traslaciones anteriores?



30. ¿Cuál es el vector de una traslación que transforma el punto $A(2, -4)$ en el punto $A'(7, 7)$?

31. Un círculo de centro $O(2, -2)$ y radio 5 se traslada según el vector $\vec{u}=(3, 4)$.

a) ¿Cuáles son el nuevo centro y el nuevo radio?

b) Dibuja el círculo trasladado.

Giros

32. Dado el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(0, -4)$, halla gráficamente:

a) El triángulo homólogo al aplicar un giro de centro el punto $P(2, 2)$ y amplitud 90°.

b) El triángulo homólogo al aplicar un giro de centro el punto $P(-3, 5)$ y amplitud −90°.

c) El triángulo homólogo al aplicar un giro de centro A y amplitud 180°.

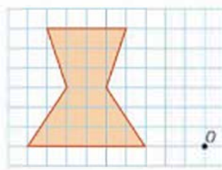
33. A una figura se le aplica un giro de centro O y amplitud 200° y, a continuación, un nuevo giro con el mismo centro y amplitud 230°. Explica cuál es el giro resultante.

34. ¿Qué figura es homóloga de un círculo si se le aplica un giro de centro el centro del círculo y amplitud un ángulo α cualquiera?

35. Halla las coordenadas del homólogo del punto $A(3, 7)$ mediante un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud −90°.

36. Los puntos $A(3, 6)$ y $B(-6, 3)$ son homólogos en un giro de centro el origen de coordenadas. ¿Cuál es la amplitud del giro?

37. Copia en tu cuaderno la siguiente figura y aplícale un giro de centro O y amplitud 225° y, al resultado, otro giro de centro O y amplitud 135°.



¿Hay algún movimiento único que transforme la figura inicial en la final directamente?

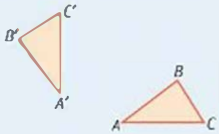
38. Dado el segmento de extremos $A(-2, 2)$ y $B(2, 5)$:

a) Calcula gráficamente los extremos A' y B' del segmento homólogo en el giro de centro el origen de coordenadas y de amplitud $-90°$.

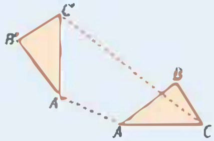
b) Comprueba que las longitudes de los segmentos inicial AB y homólogo $A'B'$ son iguales.

ACTIVIDAD RESUELTA

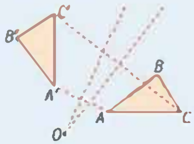
39. Se sabe que el triángulo $A'B'C'$ se ha obtenido al girar el triángulo ABC. Calcula el centro de giro.



1.° Se consideran dos segmentos de extremos puntos homólogos. Por ejemplo los segmentos AA' y CC'.

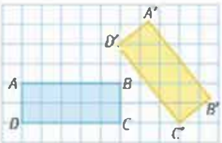


2.° Se trazan las mediatrices de los segmentos AA' y CC'. El punto de corte de estas mediatrices es el centro de giro O.

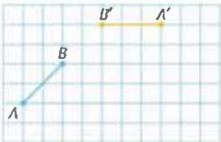


40. Las figuras amarillas se han obtenido aplicando un giro a las azules. Halla en tu cuaderno el centro de giro. Indica, aproximadamente, cuál es la amplitud de cada giro.

a)

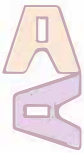


b)

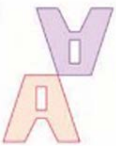


41. En cada caso, indica el centro de giro y la amplitud que se ha aplicado a la figura rosa para obtener la morada.

a)



b)



Simetría axial y simetría central

42. Halla las coordenadas del simétrico del punto $A(4, 2)$ por una simetría de centro $O(-1, 1)$. Haz un dibujo para obtener la respuesta.

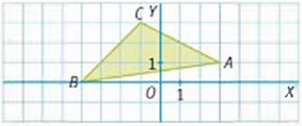
43. Halla el simétrico del segmento que tiene por extremos los puntos $A(-3, 4)$ y $B(5, 2)$, en los siguientes casos.

a) Una simetría axial respecto del eje de ordenadas

b) Una simetría axial respecto del eje de abscisas

c) Una simetría central de centro el origen de coordenadas

44. Dados los puntos $A(3, 1)$, $B(-4, 0)$ y $C(-1, 3)$:



a) Halla las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$ homólogo del ABC mediante la simetria axial respecto del eje de abscisas.

b) Halla las coordenadas de los vértices del triángulo $A''B''C''$ homólogo del $A'B'C'$ mediante la simetria axial respecto del eje de ordenadas.

45. Dados los puntos $A(1, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, -3)$ y $D(4, -4)$:

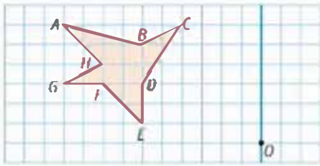
a) Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $A'B'C'D'$ homólogo del $ABCD$ mediante la simetría axial respecto del eje de abscisas.

b) Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $A'B'C'D'$ homólogo del $ABCD$ mediante la simetría axial respecto del eje de ordenadas.

c) Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $A'B'C'D'$ homólogo del $ABCD$ mediante la simetría central de centro el origen de coordenadas.

46. Al punto A se le aplica una simetría respecto del eje de ordenadas y se obtiene A'. A este nuevo punto A' se le aplica una simetría central respecto del origen de coordenadas y se obtiene el punto homólogo $A''(-3, 5)$. Calcula las coordenadas de A y de A'.

47. Aplica al polígono de la figura los siguientes movimientos.

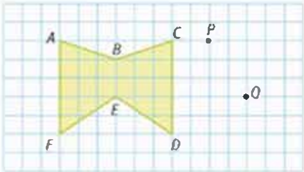


a) Una simetria axial de eje la recta r

b) Una simetria central de centro O

c) Una simetría axial de eje r y una simetría central de centro O sucesivamente

48. Copia en tu cuaderno y aplica al polígono de la figura los siguientes movimientos.



a) Una simetría central de centro P

b) Una simetría central de centro Q

c) Una simetría central de centro P y una simetría central de centro Q sucesivamente

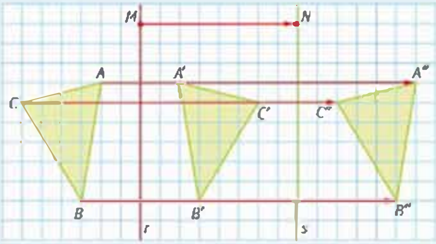
ACTIVIDAD **RESUELTA**

49. Al triángulo ABC, se le aplica:

1.° Una simetría axial de eje r

2.° Una simetría axial de eje s paralelo a r

Si la distancia entre las dos rectas paralelas es 8 unidades, halla el movimiento equivalente al producto de simetrías realizado.



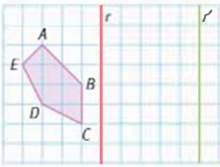
Se observa que:

$$\overline{AA''} = \overline{AM} + \overline{MA'} + \overline{A'N} + \overline{NA''} = \overline{MA'} + \overline{MA'} + \overline{A'N} + \overline{A'N} =$$
$$= 2\cdot(\overline{MA'} + \overline{A'N}) = 2\cdot\overline{MN} = 16$$

De la misma forma, $\overline{BB''} = \overline{CC''} = 16$.

El producto de dos simetrías de ejes paralelos r y s es equivalente a la traslación de vector perpendicular a los ejes y de módulo doble que la distancia entre los dos ejes.

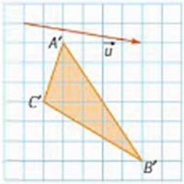
50. Al polígono $ABCDE$ de la figura se le aplica una simetría axial de eje r, y después, otra simetría axial de eje r' paralelo a r. Halla el movimiento equivalente al producto de simetrías considerado.



Movimientos inversos

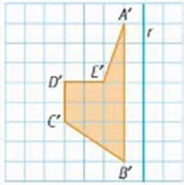
51. Las siguientes figuras se han obtenido como resultado de aplicar a otras figuras iniciales los movimientos que se indican. Halla en tu cuaderno la figura inicial en cada caso.

a)



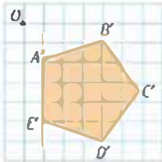
Traslación de vector $\vec{u}$

c)



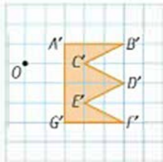
Simetría axial de eje r

b)



Giro de centro O y amplitud 180°

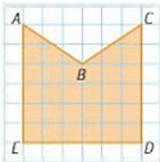
d)



Simetría central de centro O

Actividades de síntesis

52. Copia en tu cuaderno el pentágono y aplica gráficamente los siguientes movimientos.

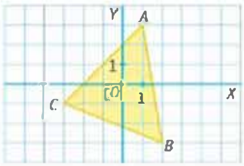


a) Una traslación de vector $\overline{BC}$

b) Un giro de centro C y amplitud 180°

c) Una simetría axial de eje la recta $\overline{BC}$

53. Calcula los vértices del triángulo ABC en los movimientos.



a) Una traslación de vector $\overline{AB}$

b) Un giro de centro A y amplitud 90°

c) Una simetría central de centro A

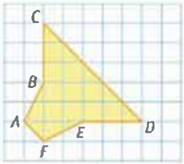
54. Copia la figura en tu cuaderno y aplícale, de forma sucesiva, los siguientes movimientos.

a) Una traslación de vector $\overline{AE}$

b) Una simetría de eje ED

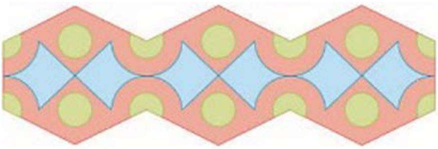
c) Una traslación de vector $\overline{EA}$

¿A qué único movimiento equivale el producto de estos tres movimientos?

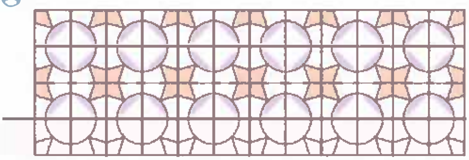


55. Aplica al segmento de extremos $A(-1, 2)$ y $B(3, 4)$ un giro de centro $O(0, 0)$ y amplitud $45°$ y, a su resultado, una traslación de vector $\vec{u} = (-1, 2)$.

56. Identifica qué movimientos se han aplicado para obtener este friso.



57. Identifica qué movimientos intervienen en este mosaico.



58. Indica, si es que existen, los ejes de simetría y los centros de simetría de las siguientes figuras.

a) Un rectángulo

b) Un trapecio isósceles

c) Un hexágono regular

d) Una semicircunferencia

59. Indica qué rectas quedan invariantes en:

a) Una traslación de vector no nulo

b) Un giro de 180°

c) Una simetría central

d) Una simetría axial

60. Indica un movimiento del plano que deje invariante una circunferencia de centro O y radio r.

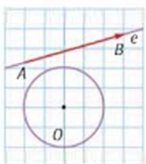
61. Halla la figura homóloga de la circunferencia de la figura mediante:

a) La traslación de vector $\overline{AB}$

b) El giro de centro O y amplitud 30°

c) La simetría axial de eje e

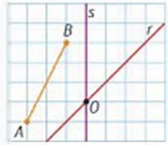
d) La simetría central de centro O



62. Copia la figura en tu cuaderno y aplica al segmento las siguientes transformaciones.

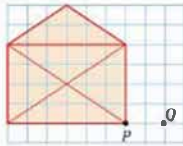
a) Un giro de centro O y amplitud 90°.

b) Un producto de simetrías axiales: primero respecto de la recta r y después respecto de la recta s.



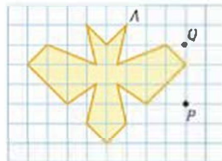
Comprueba que se obtiene el mismo resultado en ambos casos.

63. Dada la figura, aplica, en tu cuaderno, un giro de centro P y amplitud 160° y después, otro giro de centro Q y amplitud 200°.



¿A qué único movimiento equivale la composición de movimientos anteriores?

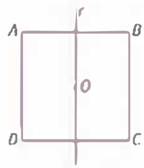
64. Aplica en tu cuaderno un giro de centro P y amplitud 120° a la siguiente figura y, después al resultado, otro giro de centro Q y amplitud 60°.



65. El centro del cuadrado $ABCD$ de la figura es el punto O. La recta r pasa por O y por los puntos medios de los lados AD y BC. Se consideran los movimientos:

G: giro de centro O y amplitud 90°

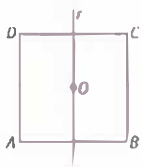
S: simetría axial de eje la recta r



a) Indica en qué puntos se transforman los vértices A, B y C en las siguientes composiciones:

i) $G \Rightarrow G$ ii) $G \Rightarrow G \Rightarrow G$ iii) $G \Rightarrow S$ iv) $S \Rightarrow G \Rightarrow G \Rightarrow G$

b) Utilizando solamente G y S, tantas veces como necesites y en el orden que elijas, escribe el movimiento que corresponde a la siguiente figura de dos formas diferentes.

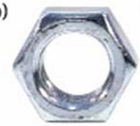


PROBLEMAS PARA RESOLVER

66. Halla, si es que existen, los ejes de simetría y el centro de simetría de las siguientes figuras.

a)

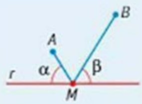
b)

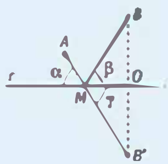


c)

ACTIVIDAD RESUELTA

67. Se quiere ir desde el punto A hasta el B pero tocando en algún punto M a la recta r. ¿Cómo debes hallar el punto M para que el camino sea lo más corto posible? ¿Cómo son en ese caso los ángulos α y β?



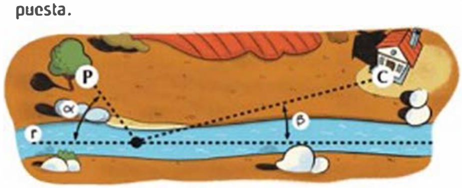


B' es el simétrico de B respecto de r.

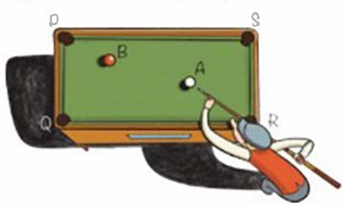
La longitud de A a B pasando por M será igual a la longitud de A a B' pasando por M. Como la distancia mínima entre dos puntos es la del segmento que los une, para que el camino sea lo más corto posible, M debe ser la intersección de r con $B'A$.

Como los triángulos MOB y MOB' son iguales, ya que tienen un ángulo recto, el lado MO es común y el lado OB mide igual que el OB', los ángulos β y γ son iguales y, por tanto, $\alpha = \beta$.

68. Se quiere ir del pino P a la casa C pero pasando por el río r. ¿El camino trazado es el trayecto más corto? Justifica tu respuesta.

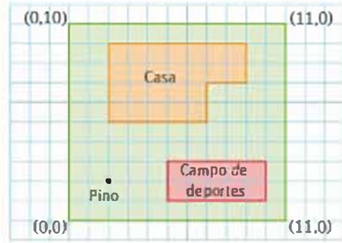


69. ¿Cuál es el camino más corto que debe seguir la bola A para chocar con la bola B tocando primero en la banda PS de la mesa de billar? ¿Y si primero debe tocar en la banda PS, después en la banda SR y, por último, tocar con la bola B? Haz un esquema de la mesa de billar en tu cuaderno y traza las trayectorias de la bola en cada caso.



70. Javier ha guardado tres mensajes en tres lugares desconocidos de su jardín. Le da estas pistas a su hermana:

- El primer mensaje está en el punto homólogo de la esquina (2, 5) de la casa en una traslación de vector (4, −2).
- El segundo está en el punto homólogo del punto donde estaba el primer mensaje en un giro de centro la esquina del campo de deportes (5, 3) y amplitud −90°.
- El tercero está en el homólogo donde estaba el segundo mensaje en una simetría central de centro (4, 2).

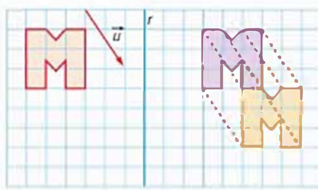


¿A qué distancia se encuentra el tercer mensaje del pino?

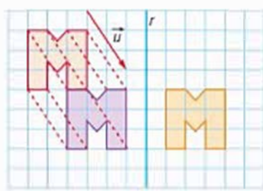
Encuentra el error

71. Se consideran dos movimientos en el plano: una traslación de vector $\vec{u}$ y una simetría axial de eje la recta r.
A la siguiente figura se le aplican de forma sucesiva los dos movimientos.

- **Solución A:** Se aplica primero la simetría axial y se obtiene la figura de color morado. Al resultado se le aplica la traslación y se obtiene la figura de color amarillo.



- **Solución B:** Se aplica primero la traslación y se obtiene la figura de color morado. Al resultado se le aplica la simetría axial y se obtiene la figura de color amarillo.



Como ves, se obtienen soluciones diferentes. ¿Cuál es la correcta? ¿O, tal vez, las dos son correctas? ¿Qué se debe indicar claramente en el enunciado de la actividad?