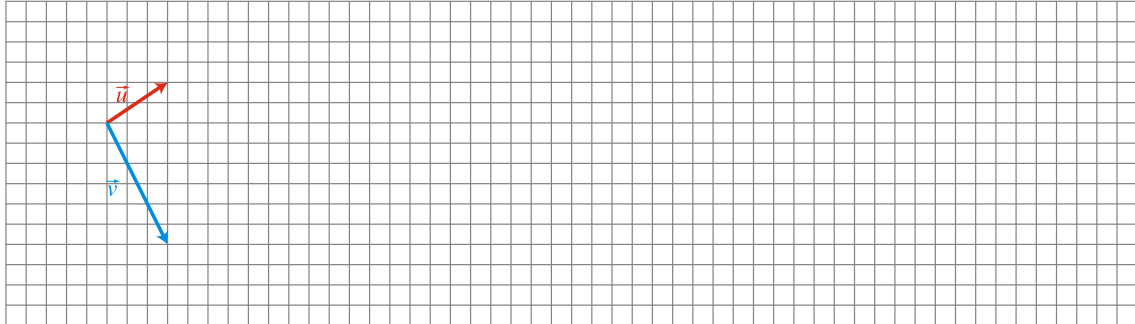


Vectores

Ejercicio nº 1.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los siguientes vectores, dibuja $2\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\vec{v}$ y $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

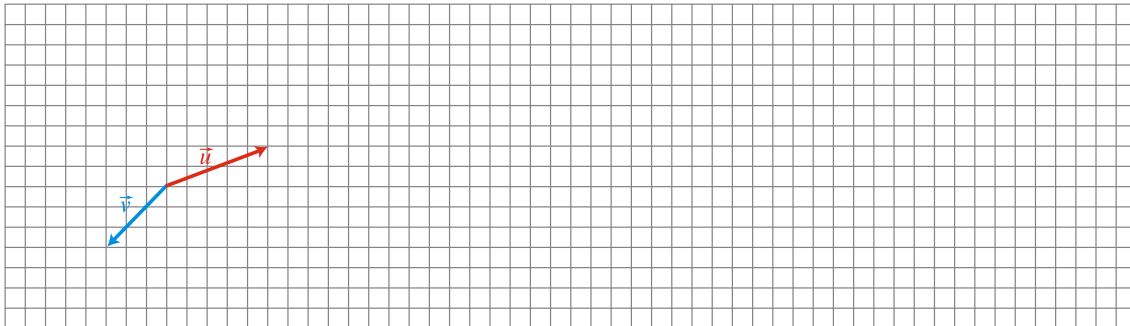


b) Las coordenadas de dos vectores son $\vec{a}(2, -3)$ y $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b}; \quad -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}; \quad \frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$$

Ejercicio nº 2.-

a) Dibuja los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los que muestra la figura:

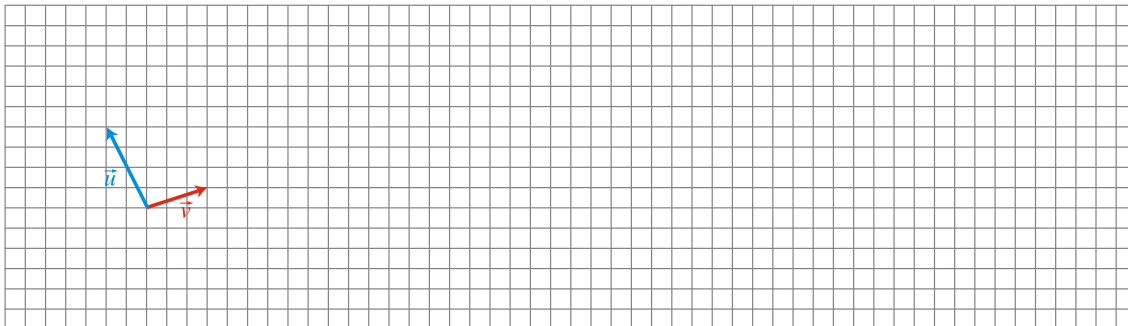


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ y $\vec{b}(3, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b}; \quad 2\vec{a}-\vec{b}; \quad \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

Ejercicio nº 3.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores que muestra la figura, dibuja $-\vec{u}+2\vec{v}$, $\frac{2}{3}\vec{u}+\vec{v}$ y $-\frac{1}{3}\vec{u}-\vec{v}$:

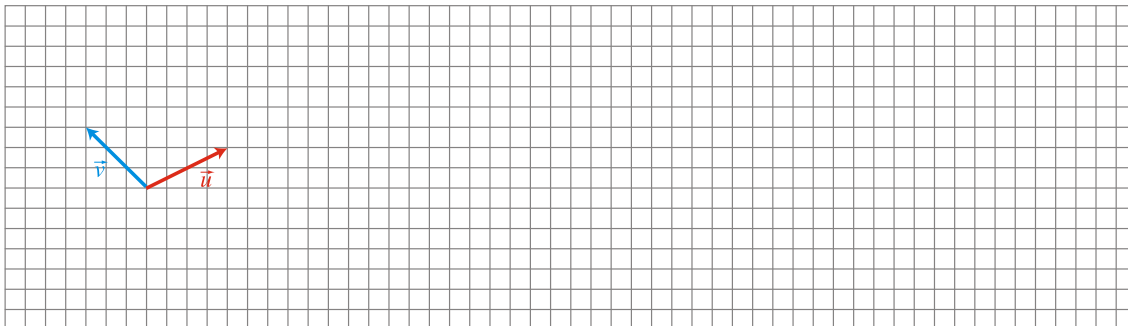


b) Si las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $\left(\frac{2}{5}, -3\right)$ y $(-1, 3)$, obtén las coordenadas de los vectores:

$$5\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}; \quad -\vec{a}+2\vec{b}; \quad \frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$$

Ejercicio nº 4.-

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los que muestra la figura. A partir de ellos, dibuja $-\vec{u}-\vec{v}$, $-2\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$:



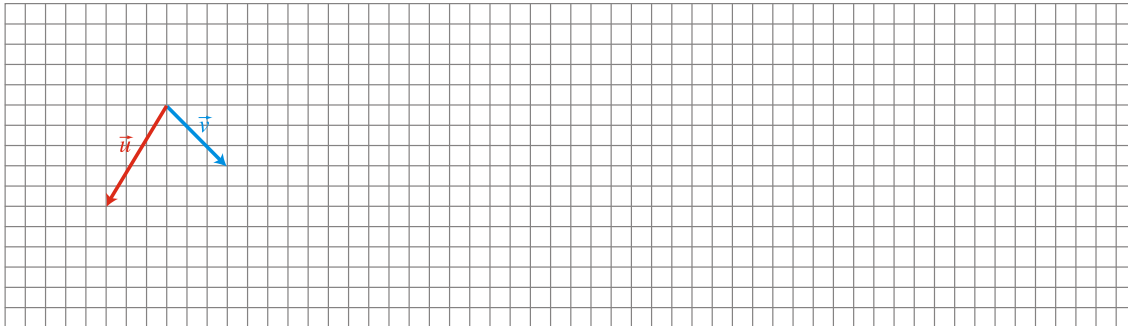
b) Si las coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $(-2, 1)$ y $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+4\vec{b}; \quad -\vec{a}+\vec{b}; \quad \frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$

Ejercicio nº 5.-

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u} + 2\vec{v}; \quad \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}; \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$

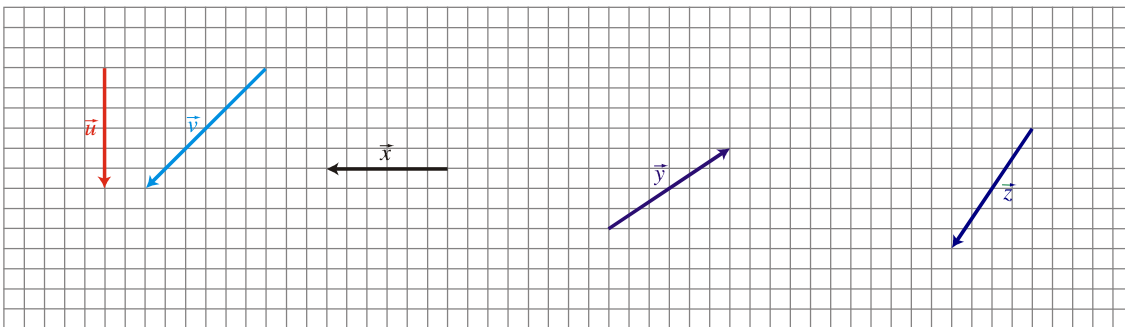


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$ y $\vec{b}(2, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}; \quad -2\vec{a} + \vec{b}; \quad -4\vec{a} + \vec{b}$$

Ejercicio nº 6.-

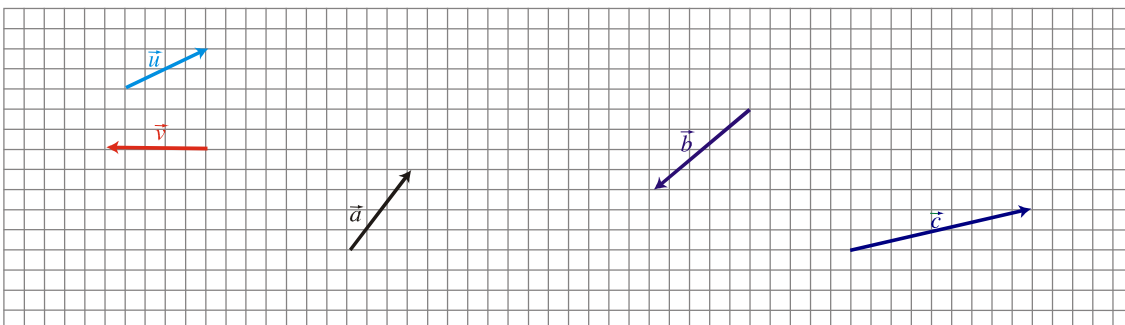
a) Escribe los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Escribe el vector $\vec{a}(0, 17)$ como combinación lineal de $\vec{b}\left(\frac{1}{5}, 3\right)$ y $\vec{c}(-1, 2)$.

Ejercicio nº 7.-

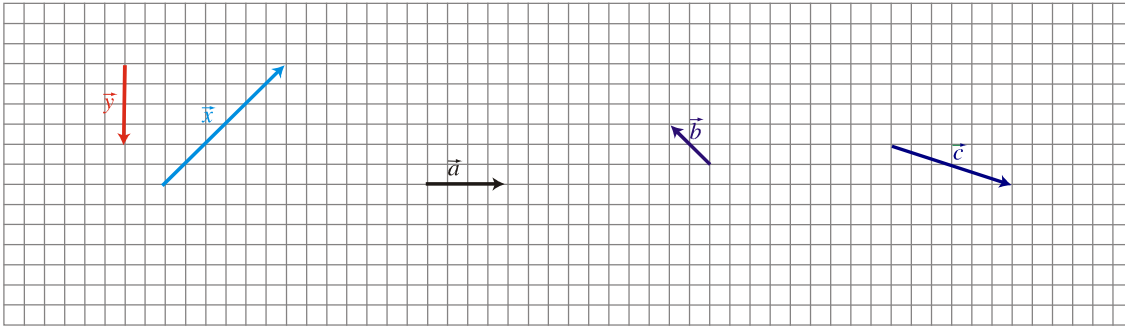
a) Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Expresa el vector $\vec{x}(5, -2)$ como combinación lineal de $\vec{y}(1, -2)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Ejercicio nº 8.-

a) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

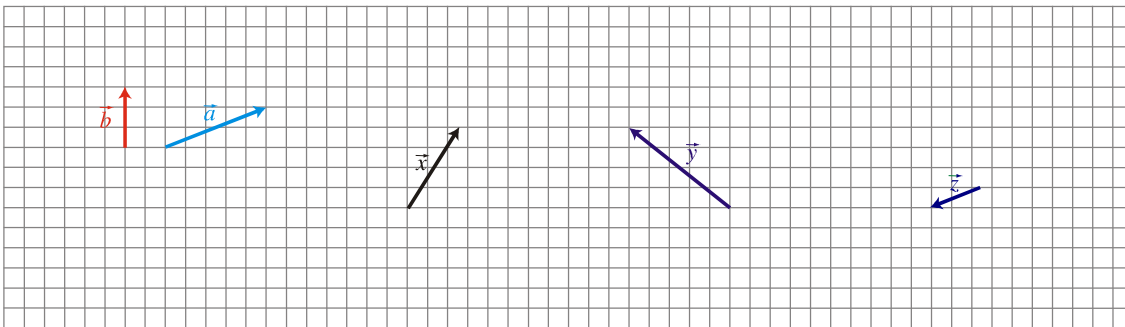


b) Halla las coordenadas del vector $\vec{w} (1, 0)$ con respecto a la base formada por $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$ y $\vec{v} (-3, 2)$

Ejercicio nº 9.-

a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u} (-2, -3)$ con respecto a la base formada por los vectores $\vec{v} \left(2, -\frac{1}{3} \right)$ y $\vec{w} (1, -1)$

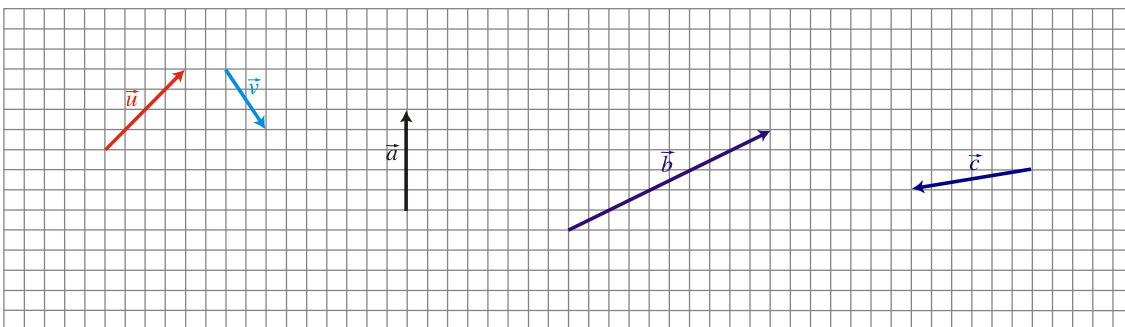
b) Expresa los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:



Ejercicio nº 10.-

a) Expresa el vector $\vec{x} (4, 1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{y} (2, -3)$ y $\vec{z} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$.

b) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Ejercicio nº 11.-

Dados $\vec{x}(5, -4)$, $\vec{y}(3, 2)$ y $\vec{z}(1, k)$:

- a) Halla el valor de k para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo 90° .
- b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{x}$.

Ejercicio nº 12.-

Si $\vec{a}(1, -3)$ y $\vec{b}(m, 2)$:

- a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.
- b) Calcula el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ siendo $\vec{c}(4, 2)$.

Ejercicio nº 13.-

Dados los vectores $\vec{u}(-1, 4)$, $\vec{v}(3, m)$ y $\vec{w}(2, -3)$:

- a) Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.
- b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

Ejercicio nº 14.-

Considera los vectores $\vec{x}(a, 3)$ e $\vec{y}(-1, b)$. Halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares y que $|\vec{x}| = 5$.

Ejercicio nº 15.-

- a) Halla el ángulo que forman los vectores

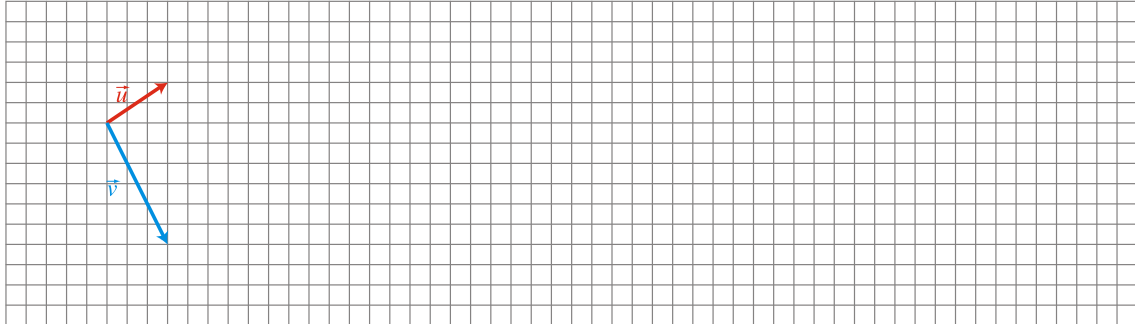
$$\vec{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \text{ y } \vec{b}(1, 1)$$

- b) ¿Cuál sería el valor de x para que el vector $\vec{u}(1, x)$ fuera perpendicular a $\vec{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$?

Soluciones ejercicios de Vectores

Ejercicio nº 1.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los siguientes vectores, dibuja $2\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\vec{v}$ y $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

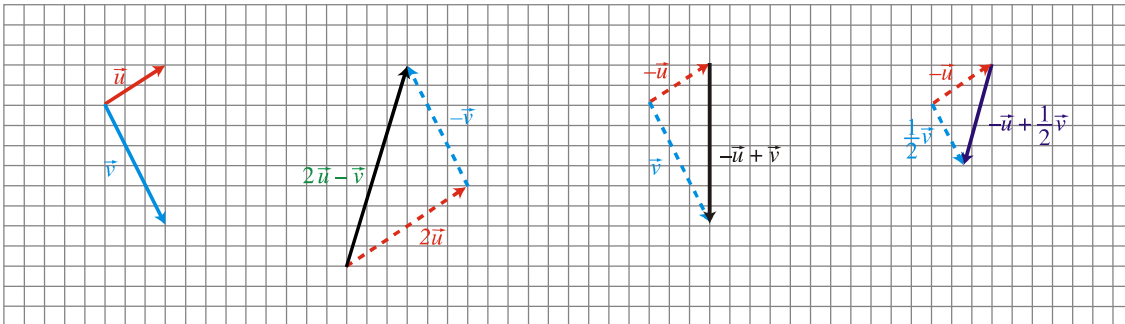


b) Las coordenadas de dos vectores son $\vec{a}(2, -3)$ y $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b}; \quad -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}; \quad \frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$$

Solución:

a)



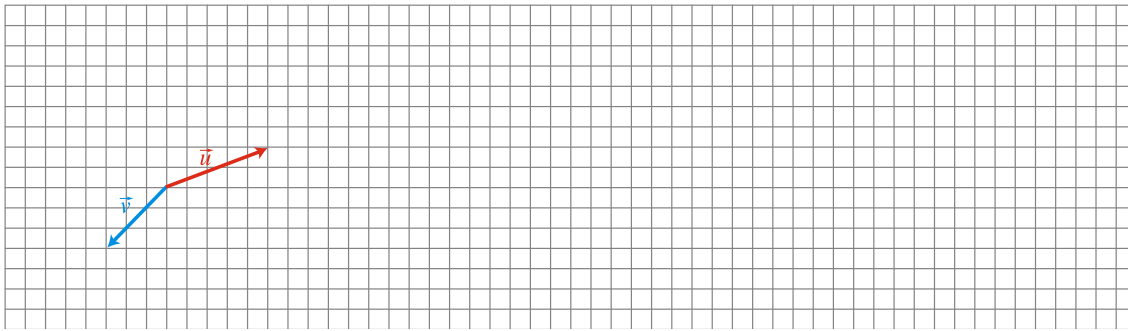
$$b) -3\vec{a}+2\vec{b} = -3(2, -3) + 2\left(-\frac{1}{2}, 2\right) = (-6, 9) + (-1, 4) = (-7, 13)$$

$$-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} = -(2, -3) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}, 2\right) = (-2, 3) + \left(-\frac{1}{4}, 1\right) = \left(-\frac{9}{4}, 4\right)$$

$$\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}) = \frac{1}{3}\left[(2, -3) - \left(-\frac{1}{2}, 2\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}, -5\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}\right)$$

Ejercicio nº 2.-

a) Dibuja los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los que muestra la figura:

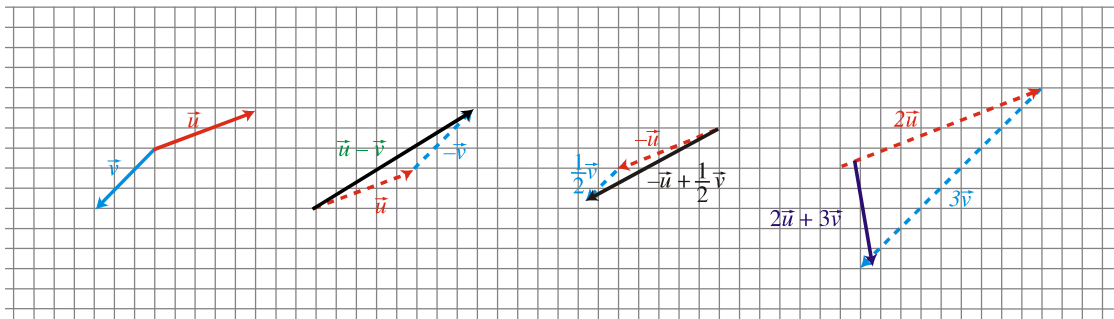


b) Dados los vectores $\vec{a} \left(\frac{2}{3}, -1 \right)$ y $\vec{b} (3, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a} + 2\vec{b}; \quad 2\vec{a} - \vec{b}; \quad \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Solución:

a)



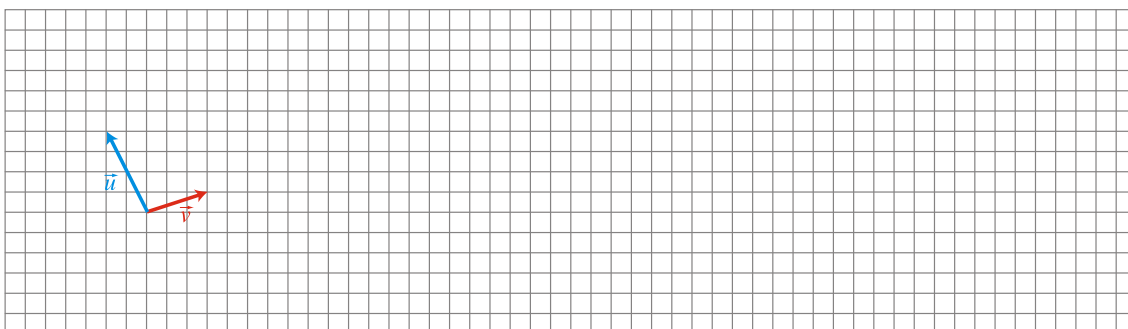
$$b) -3\vec{a} + 2\vec{b} = -3\left(\frac{2}{3}, -1\right) + 2(3, -2) = (-2, 3) + (6, -4) = (4, -1)$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2\left(\frac{2}{3}, -1\right) - (3, -2) = \left(\frac{4}{3}, -2\right) - (3, -2) = \left(\frac{-5}{3}, 0\right)$$

$$\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \left(\frac{2}{3}, -1\right) - \frac{1}{3}(3, -2) = \left(\frac{2}{3}, -1\right) - \left(1, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Ejercicio nº 3.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores que muestra la figura, dibuja $-\vec{u} + 2\vec{v}$, $\frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}$ y $-\frac{1}{3}\vec{u} - \vec{v}$:

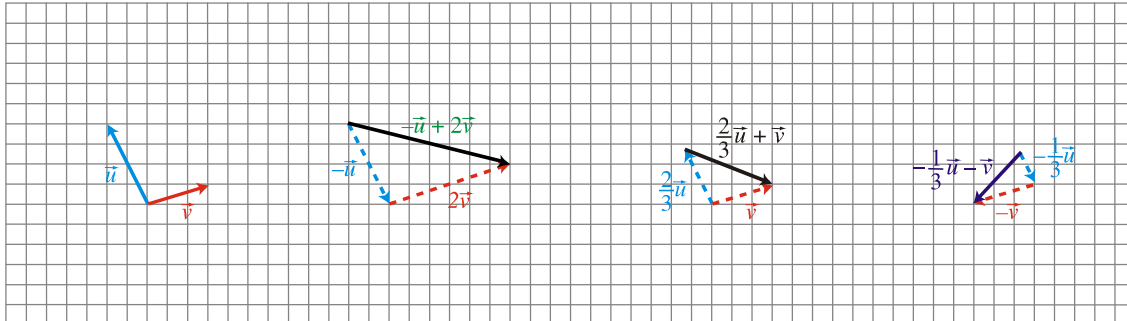


b) Si las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $\left(\frac{2}{5}, -3\right)$ y $(-1, 3)$, obtén las coordenadas de los vectores:

$$5\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}; \quad -\vec{a} + 2\vec{b}; \quad \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

Solución:

a)



$$b) 5\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} = 5\left(\frac{2}{5}, -3\right) + \frac{1}{5}(-1, 3) = (2, -15) + \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{72}{5}\right)$$

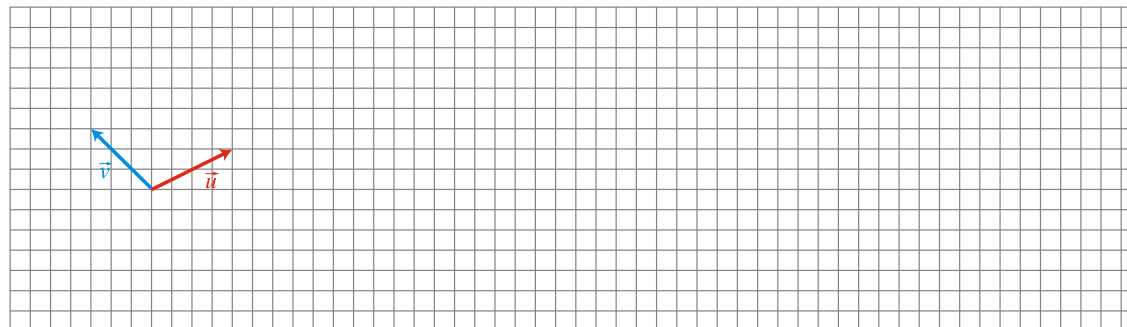
$$-\vec{a} + 2\vec{b} = -\left(\frac{2}{5}, -3\right) + 2(-1, 3) = \left(-\frac{2}{5}, 3\right) + (-2, 6) = \left(-\frac{12}{5}, 9\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}, -3\right) - (-1, 3) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}\right) - (-1, 3) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{9}{2}\right)$$

Ejercicio nº 4.-

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los que muestra la figura. A partir de ellos, dibuja

$$-\vec{u} - \vec{v}, -2\vec{u} + \vec{v} \text{ y } \vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} :$$

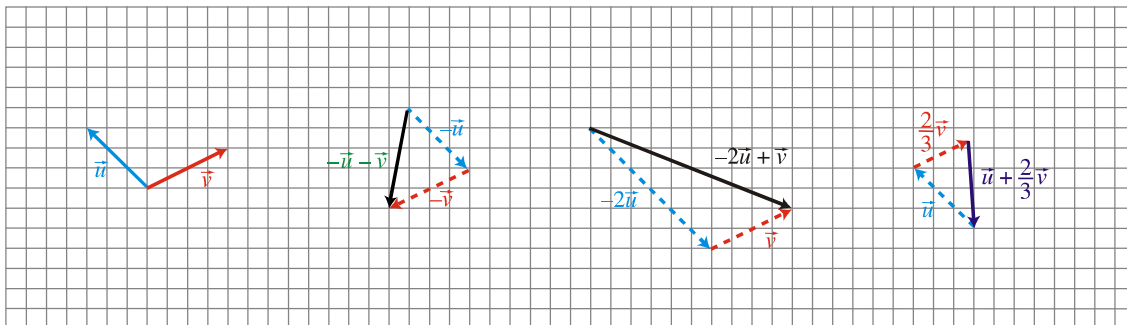


b) Si las coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $(-2, 1)$ y $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a} + 4\vec{b}; \quad -\vec{a} + \vec{b}; \quad \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

Solución:

a)



$$b) -3\vec{a} + 4\vec{b} = -3(-2, 1) + 4\left(1, \frac{-1}{4}\right) = (6, -3) + (4, -1) = (10, -4)$$

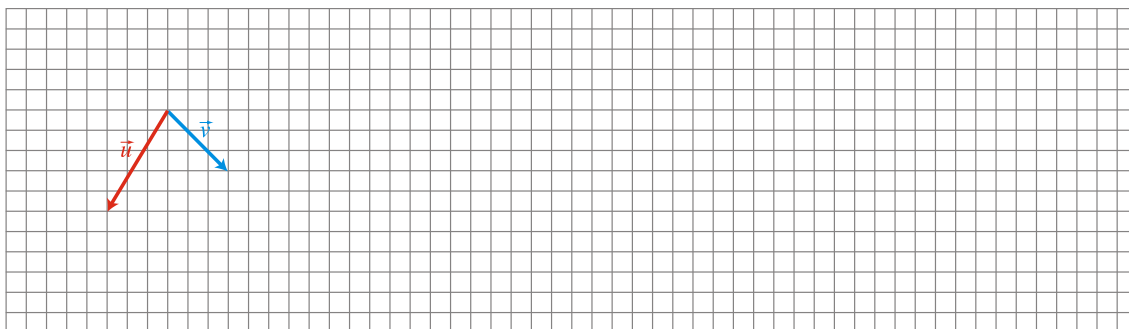
$$-\vec{a} + \vec{b} = -(-2, 1) + \left(1, \frac{-1}{4}\right) = (2, -1) + \left(1, \frac{-1}{4}\right) = \left(3, \frac{-5}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = \frac{1}{2}(-2, 1) + 2\left(1, \frac{-1}{4}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + \left(2, \frac{-1}{2}\right) = (1, 0)$$

Ejercicio nº 5.-

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u} + 2\vec{v}; \quad \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}; \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$

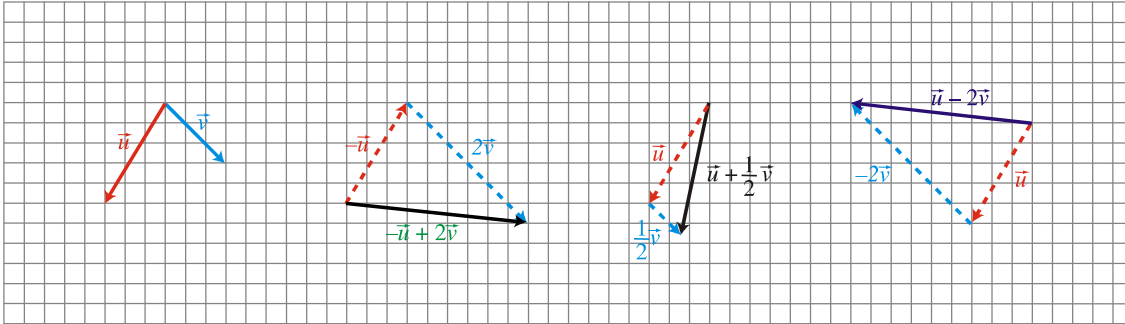


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{-3}{4}, 2\right)$ y $\vec{b}(2, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}; \quad -2\vec{a} + \vec{b}; \quad -4\vec{a} + \vec{b}$$

Solución:

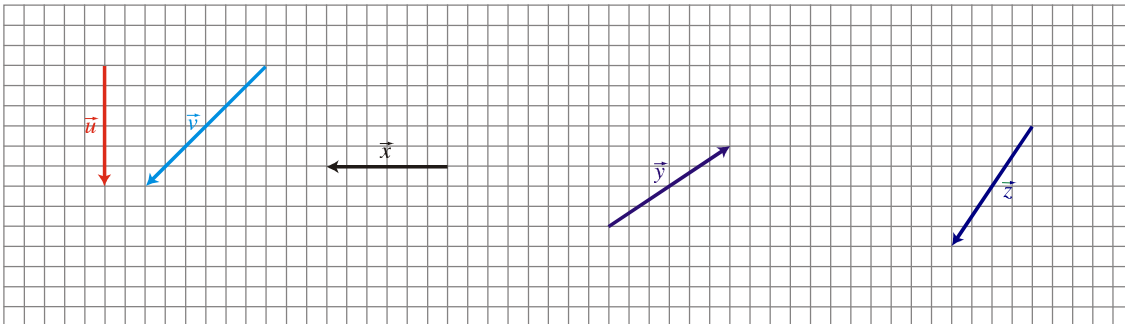
a)



$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} &= \left(-\frac{3}{4}, 2\right) - \frac{1}{2}(2, -2) = \left(-\frac{3}{4}, 2\right) - (1, -1) = \left(-\frac{7}{4}, 3\right) \\ -2\vec{a} + \vec{b} &= -2\left(-\frac{3}{4}, 2\right) + (2, -2) = \left(\frac{3}{2}, -4\right) + (2, -2) = \left(\frac{7}{2}, -6\right) \\ -4\vec{a} + \vec{b} &= -4\left(-\frac{3}{4}, 2\right) + (2, -2) = (3, -8) + (2, -2) = (5, -10) \end{aligned}$$

Ejercicio nº 6.-

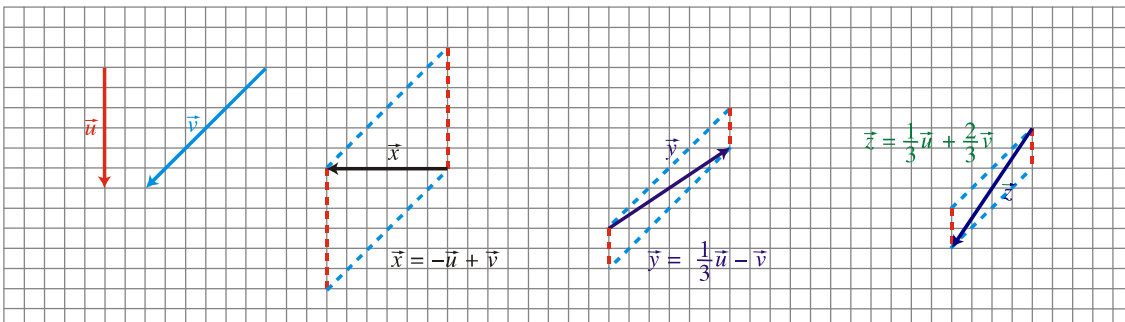
a) Escribe los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Escribe el vector $\vec{a}$ $(0, 17)$ com combinación lineal de $\vec{b}$ $\left(\frac{1}{5}, 3\right)$ y $\vec{c}$ $(-1, 2)$.

Solución:

a)



b) Tenemos que encontrar dos números, m y n , tales que:

$$\vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(0, 17) = m \cdot \left(\frac{1}{5}, 3\right) + n \cdot (-1, 2)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5}, 3m\right) + (-n, 2n)$$

$$(0, 17) = \left(\frac{m}{5} - n, 3m + 2n\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{m}{5} - n \\ 17 = 3m + 2n \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = m - 5n \\ 17 = 3m + 2n \end{cases} \quad \begin{aligned} 5n &= m \\ 17 &= 15n + 2n \rightarrow 17 = 17n \rightarrow n = 1 \\ m &= 5n = 5 \end{aligned}$$

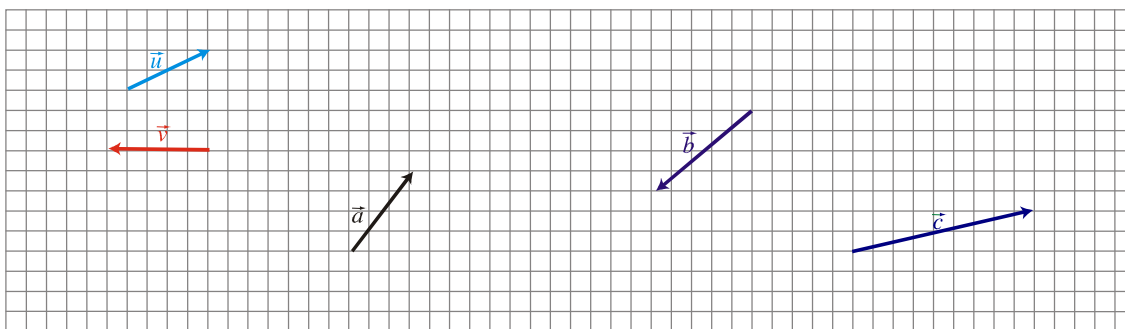
Por tanto:

$$\vec{a} = 5 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(0, 17) = 5\left(\frac{1}{5}, 3\right) + (-1, 2)$$

Ejercicio n° 7.-

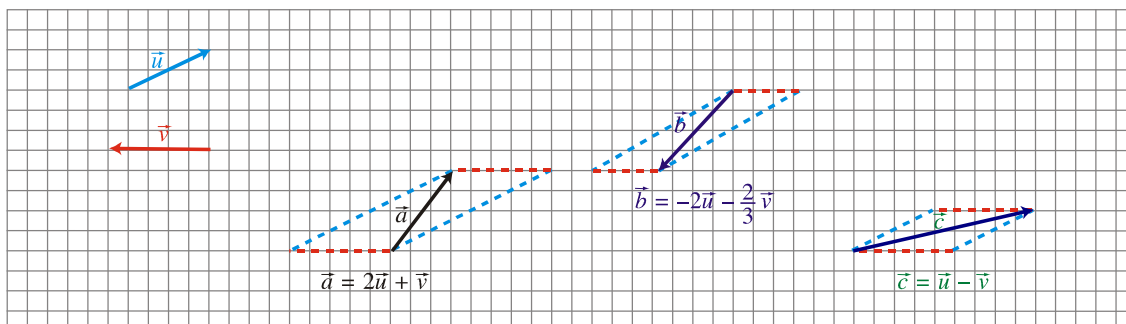
a) Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Expresa el vector $\vec{x}(5, -2)$ como combinación lineal de $\vec{y}(1, -2)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Solución:

a)



b) Hemos de encontrar dos números, m y n , tales que:

$$\vec{x} = m \cdot \vec{y} + n \cdot \vec{z}, \text{ es decir:}$$

$$(5, -2) = m(1, -2) + n\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$(5, -2) = (m, -2m) + \left(\frac{n}{2}, 2n\right)$$

$$(5, -2) = \left(m + \frac{n}{2}, -2m + 2n\right)$$

$$\begin{cases} 5 = m + \frac{n}{2} \\ -2 = -2m + 2n \end{cases} \quad \begin{cases} 10 = 2m + n \\ -2 = -2m + 2n \end{cases} \quad \begin{cases} n = 10 - 2m \\ -1 = -m + n \end{cases} \quad \begin{cases} n = 10 - 2m \\ n = -1 + m \end{cases}$$

$$10 - 2m = -1 + m \rightarrow -2m - m = -1 - 10 \rightarrow -3m = -11 \rightarrow m = \frac{11}{3}; \quad n = -1 + m = -1 + \frac{11}{3} = \frac{8}{3}$$

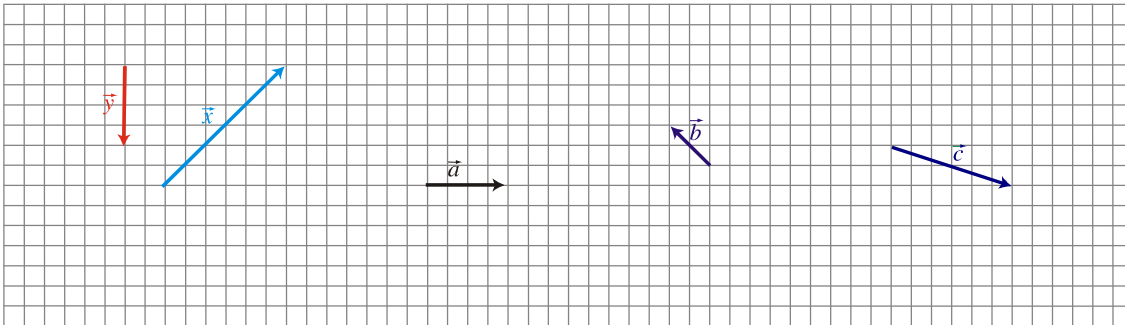
Por tanto:

$$\vec{x} = \frac{11}{3}\vec{y} + \frac{8}{3}\vec{z}, \text{ es decir:}$$

$$(5, -2) = \frac{11}{3}(1, -2) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Ejercicio nº 8.-

a) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

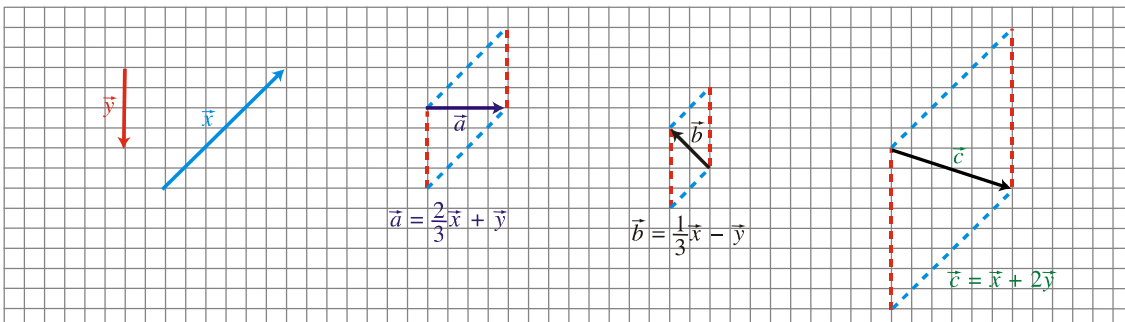


b) Halla las coordenadas del vector $\vec{w}(1, 0)$ con respecto a la base formada por

$$\vec{u}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ y } \vec{v}(-3, 2)$$

Solución:

a)



b) Tenemos que hallar dos números, m y n , tales que:

$$\vec{w} = m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}, \text{ es decir:}$$

$$(1, 0) = m \left(-\frac{1}{2}, 1 \right) + n(-3, 2)$$

$$(1, 0) = \left(-\frac{m}{2}, m \right) + (-3n, 2n)$$

$$(1, 0) = \left(-\frac{m}{2} - 3n, m + 2n \right)$$

$$\begin{cases} 1 = -\frac{m}{2} - 3n \\ 0 = m + 2n \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = -m - 6n \\ -2n = m \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2n - 6n \\ 2 = -4n \end{cases} \rightarrow n = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$m = -2n = 1$$

Por tanto:

$$\vec{w} = 1 \cdot \vec{u} + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \vec{v}, \text{ es decir:}$$

$$(1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 1 \right) - \frac{1}{2}(-3, 2)$$

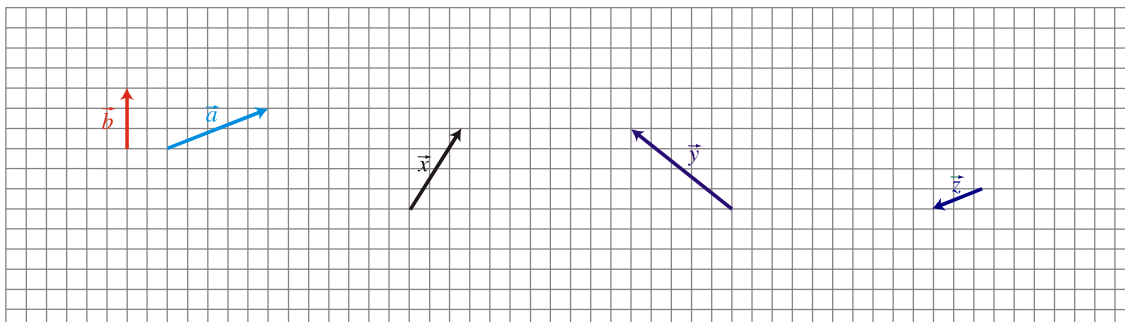
Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a la base formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son: $\left(1, -\frac{1}{2} \right)$

Ejercicio nº 9.-

a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u}(-2, -3)$ con respecto a la base formada por los vectores

$$\vec{v} \left(2, -\frac{1}{3} \right) \text{ y } \vec{w} (1, -1)$$

b) Expresa los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:



Solución:

a) Hemos de hallar dos números, m y n , tales que:

$$\vec{u} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{w}, \text{ es decir:}$$

$$(-2, -3) = m \cdot \left(2, -\frac{1}{3} \right) + n \cdot (1, -1)$$

$$(-2, -3) = \left(2m, -\frac{m}{3} \right) + (n, -n)$$

$$(-2, -3) = \left(2m + n, -\frac{m}{3} - n \right)$$

$$\begin{cases} -2 = 2m + n \\ -3 = -\frac{m}{3} - n \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = 2m + n \\ -9 = -m - 3n \end{cases} \quad \begin{cases} -2 - 2m = n \\ -9 = -m - 3(-2 - 2m) \end{cases}$$

$$-9 = -m + 6 + 6m \rightarrow -9 - 6 = -m + 6m \rightarrow -15 = 5m \rightarrow m = -3$$

$$n = -2 - 2m = -2 + 6 = 4$$

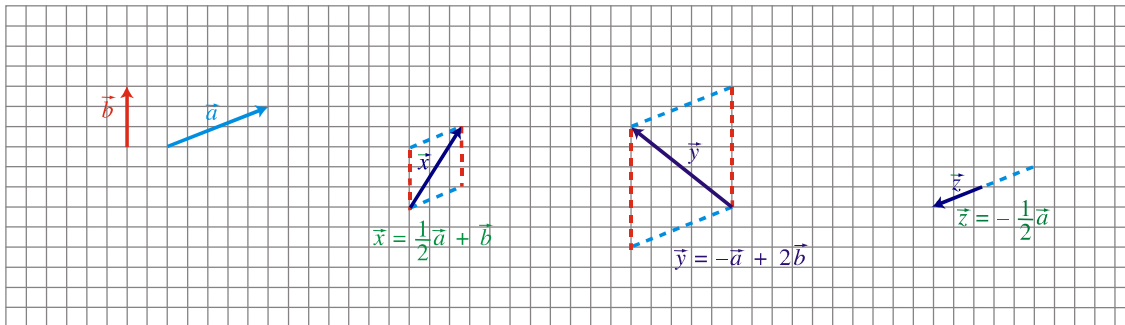
Por tanto:

$\vec{u} = -3\vec{v} + 4\vec{w}$, es decir:

$$(-2, -3) = -3\left(2, -\frac{1}{3}\right) + 4(1, -1)$$

Las coordenadas de $\vec{u}$ con respecto a la base formada por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $(-3, 4)$.

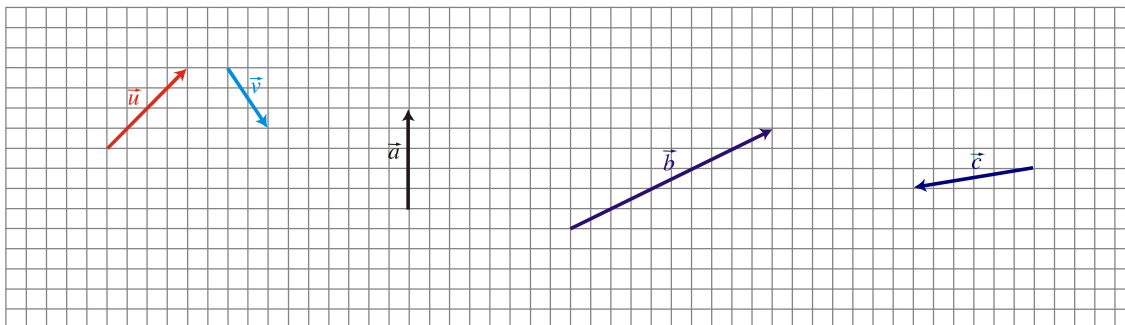
b)



Ejercicio nº 10.-

a) Expresa el vector $\vec{x}(4,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{y}(2,-3)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2},1\right)$.

b) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Solución:

a) Tenemos que hallar dos números, m y n , tales que:

$\vec{x} = m \cdot \vec{y} + n \cdot \vec{z}$, es decir:

$$(4, 1) = m(2, -3) + n\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$(4, 1) = (2m, -3m) + \left(\frac{n}{2}, n\right)$$

$$(4, 1) = \left(2m + \frac{n}{2}, -3m + n\right)$$

$$\begin{cases} 4 = 2m + \frac{n}{2} \\ 1 = -3m + n \end{cases} \quad \begin{cases} 8 = 4m + n \\ 1 = -3m + n \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 4m = n \\ 1 + 3m = n \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 4m = 1 + 3m \\ 8 - 1 = 3m + 4m \end{cases}$$

$$7 = 7m \rightarrow m = 1$$

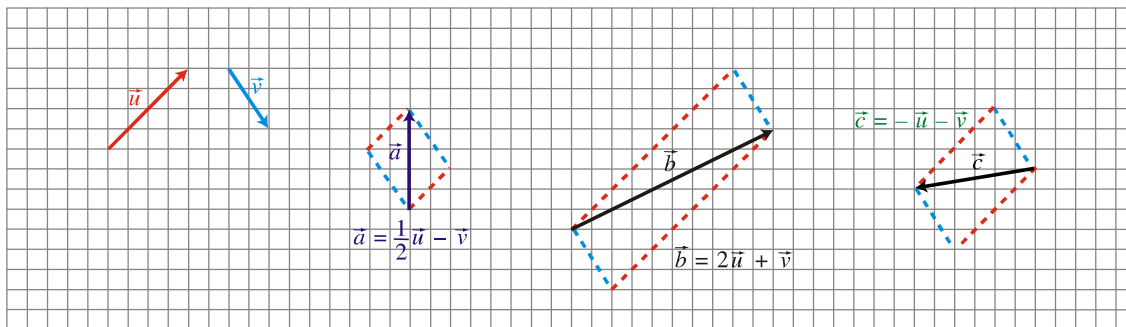
$$n = 1 + 3m = 1 + 3 = 4$$

Por tanto:

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{y} + 4 \cdot \vec{z}; \text{ es decir:}$$

$$(4, 1) = (2, -3) + 4\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

b)



Ejercicio nº 11.-

Dados $\vec{x}(5, -4)$, $\vec{y}(3, 2)$ y $\vec{z}(1, k)$:

a) Halla el valor de k para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo 90° .

b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{x}$.

Solución:

a) Para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo de 90° (sean perpendiculares), su producto escalar ha de ser igual a cero:

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -4) \cdot (1, k) = 5 - 4k = 0 \rightarrow k = \frac{5}{4}$$

b) Hallamos el módulo de $\vec{x}$

$$|\vec{x}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{x}$ será:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}} \right)$$

Ejercicio nº 12.-

Si $\vec{a}(1, -3)$ y $\vec{b}(m, 2)$:

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.

b) Calcula el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ siendo $\vec{c}(4, 2)$.

Solución:

a) Para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -3) \cdot (m, 2) = m - 6 = 0 \rightarrow m = 6$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}} \right) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{(1, 3) \cdot (4, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{4 - 6}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-2}{\sqrt{200}} = \\ &= -0,14 \rightarrow \left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}} \right) = 98^\circ 7' 48'' \end{aligned}$$

Ejercicio nº 13.-

Dados los vectores $\vec{u}(-1, 4)$, $\vec{v}(3, m)$ y $\vec{w}(2, -3)$:

a) Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 4) \cdot (3, m) = -3 + 4m = 0 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \cos \left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}} \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{-2 - 12}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-14}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-14}{\sqrt{221}} = -0,94$$

$$\text{Así, } \left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}} \right) = 160^\circ 20' 46''.$$

Ejercicio nº 14.-

Considera los vectores $\vec{x}(a, 3)$ e $\vec{y}(-1, b)$. Halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares y que $|\vec{x}| = 5$.

Solución:

1.º) Para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a, 3) \cdot (-1, b) = -a + 3b = 0 \rightarrow b = \frac{a}{3}$$

2.º) Hallamos el módulo de $\vec{x}$ e igualamos a 5:

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9} = 5 \rightarrow a^2 + 9 = 25$$

$$a^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow a = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \rightarrow b = \frac{4}{3} \\ a = -4 \rightarrow b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos posibilidades:

$$a_1 = 4, b_1 = \frac{4}{3}; a_2 = -4, b_2 = -\frac{4}{3}$$

Ejercicio nº 15.-

a) Halla el ángulo que forman los vectores

$$\vec{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \text{ y } \vec{b}(1, 1)$$

b) ¿Cuál sería el valor de x para que el vector $\vec{u}(1, x)$ fuera perpendicular a $\vec{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{-\frac{1}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -0,14 \rightarrow \\ &\rightarrow \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 98^\circ 7' 48'' \end{aligned}$$

b) Para que $\vec{u}$ y $\vec{a}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = (1, x) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{4x}{5} = 0 \rightarrow 3 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$