Ejercicio 1

a) **(1,25 puntos)** Dadas las rectas r: $\frac{x-2}{3} = \frac{3-y}{-2}$ y s: $y = 3x - 5$, se pide calcular el ángulo que forman.

b) **(1,25 puntos)** Desarrollar por el Binomio de Newton: $\left(2x^3\, y^4 - \frac{3\,x^2}{y^3}\right)^5$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Operar las fracciones algebraicas y simplificar resultado:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{4-x^2} - \frac{x+1}{x+2} =$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcular el valor de k para que el punto A=(3, 2-k) pertenezca a la recta r de

ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Ejercicio 4

a) **(1,25 puntos)** Simplificar la fracción algebraica: $\frac{2x^5-3x^4-2x^3+3x^2}{2x^6-5x^5-x^4+6x^3} =$

b) **(1,25 puntos)** Simplifica la expresión: $\frac{3^{n-2}\cdot\,(n+3)!}{3^n\cdot\binom{n+3}{3}} =$

Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Dado el triángulo de vértices A(-2, -1), B(-1, 2) y C(3, 1) halla su circuncentro (punto de corte de las mediatrices).

Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Calcula k para que las rectas r: kx + y = 12 y s: 4x – 3y = k+1 sean paralelas. Calcula la distancia entre ellas para ese valor de k.

Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Calcula el simétrico del punto P(1,1) respecto de la recta r: y = 3x – 7

Ejercicio 8

a) **(1,25 puntos)** Demuestra que los vectores $\vec{u} = (1, -2) y \vec{v}(3,1)$ forman base de V^2.

Calcula las coordenadas del vector (-2, 6) en esa base.

b) **(1,25 puntos)** Calcula el valor de k para que los vectores

$\vec{u} = (1 + k, +2) \quad y \quad \vec{v} = (k, k - 2)$ sean perpendiculares

Ejercicio 1

a) **(1,25 puntos)** Dadas las rectas r: $\frac{x-2}{3} = \underbrace{\frac{3-y}{-2}}_{\frac{y-3}{2}}$ y s: $\underbrace{y = 3x - 5}$, se pide calcular el ángulo que forman.

$3x-y-5=0$

$\vec{n}_s=(3,-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v}_s=(1,3)$

$\vec{v}_r = (3,2)$ y $\vec{v}_s\ (1,3)$

$$\cos(\hat{r,s}) = |\cos(\vec{v}_r,\vec{v}_s)| = \frac{|(3,2)\cdot(1,3)|}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} =$$

$$= \frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 3|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}} = \frac{|9|}{\sqrt{130}} = \frac{9}{\sqrt{130}} = 0,7893 \Rightarrow$$

$$\boxed{(\hat{r,s}) = \text{arc}\cos 0,7893 = 37,8799^\circ}$$

b) **(1,25 puntos)** Desarrollar por el Binomio de Newton: $\left(2x^3y^4 - \frac{3x^2}{y^3}\right)^5 =$

$$(2x^3y^4)^5 - 5\cdot(2x^3y^4)^4\,\frac{3x^2}{y^3} + 10(2x^3y^4)^3\left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^2 - 10(2x^3y^4)^2\left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^3 +$$

$$+ 5(2x^3y^4)\cdot\left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^4 - \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^5 =$$

$$= 32x^{15}y^{20} - 5\cdot 16x^{12}y^{16}\,\frac{3x^2}{y^3} + 10\cdot 8\cdot x^9y^{12}\cdot\frac{9x^4}{y^6} - 10\cdot 4\cdot x^6y^8\cdot\frac{27x^6}{y^9}$$

$$+ 10x^3y^4\cdot\frac{81x^8}{y^{12}} - \frac{243x^{10}}{y^{15}} =$$

$$\boxed{= 32x^{15}y^{20} - 240x^{14}\cdot y^{13} + 720x^{13}y^6 - 1080\frac{x^{12}}{y} + 810\frac{x^{11}}{y^8} - \frac{243x^{10}}{y^{15}}}$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Operar las fracciones algebraicas y simplificar resultado:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{4-x^2} - \frac{x+1}{x+2} =$$

$$= \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{\underbrace{x^2-4}_{(x-2)(x+2)}} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)+(x-3)-(x+1)(x-2)}{(x^2-4)} =$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2+x-3-(\overbrace{x^2-2x+x-2}^{x^2-x-2})}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2}+2x-5-\cancel{x^2}+x+2}{x^2-4}$$

$$= \boxed{\frac{3x-3}{x^2-4}}$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcular el valor de k para que el punto A=(3, 2-k) pertenezca a la recta r de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5+2t \\ y = -2-3t \end{cases}$

Sustituimos punto en ec. recta:

$$\begin{cases} 3 = 5+2t \Rightarrow 3-5 = 2t \Rightarrow -2 = 2t \Rightarrow \frac{-2}{2} = t \Rightarrow t=-1 \\ 2-k = -2-3t \Rightarrow 2-k = -2-3\cdot(-1) \Rightarrow 2-k = -2+3 \Rightarrow 2-k = 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2-1 = k \Rightarrow \boxed{1 = k}$$

Ejercicio 4

a) **(1,25 puntos)** Simplificar la fracción algebraica: $\frac{2x^5-3x^4-2x^3+3x^2}{2x^6-5x^5-x^4+6x^3} =$

$$= \frac{x^2\cdot(2x^3-3x^2-2x+3)}{x^3\cdot(2x^3-5x^2-x+6)} = \frac{\cancel{x^2}\cdot\cancel{2}\cdot(x-1)\cancel{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\cancel{(x+1)}}{x^{\cancel{3}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{(x+1)}(x-2)\cancel{\left(x-\frac{3}{2}\right)}} = \boxed{\frac{x-1}{x(x-2)}}$$

$2x^3-3x^2-2x+3=0 \Rightarrow$ Divisores t.i. $\{1,-1,3,-3\}$

$P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2-2\cdot1+3=2-3-2+3=0 \Rightarrow x=1$ es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es factor

$2x^3-3x^2-2x+3=(x-1)\cdot Q(x)=(x-1)(2x^2-x-3)=(x-1)\cdot 2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0=R} \end{array}$$

$2x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm5}{4}$ $\begin{cases} x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \\ x=\frac{-4}{4}=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \text{ es raíz} \Rightarrow x-\frac{3}{2} \text{ es factor} \\ x=-1 \text{ es raíz} \Rightarrow x+1 \text{ es factor} \end{cases}$

$2x^3-5x^2-x+6=0 \Rightarrow$ Divisores t.i. $\{1,-1,2,-2,3,-3,6,-6\}$

$P(-1)=2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-(-1)+6=2\cdot(-1)-5\cdot1+1+6=-2-5+1+6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-1$ es raíz $\Rightarrow x+1$ es factor

$2x^3-5x^2-x+6=(x+1)\cdot Q(x)=(x+1)\cdot(2x^2-7x+6)=$

$=(x+1)\cdot2\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & 7 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 6 & \boxed{0=R} \end{array}$$

$2x^2-7x+6=0 \Rightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot2\cdot6}}{2\cdot2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}=$

$=\frac{7\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{7\pm1}{4}$ $\begin{cases} x=\frac{8}{4}=2 \Rightarrow (x-2) \text{ es factor} \\ x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right) \text{ es factor} \end{cases}$

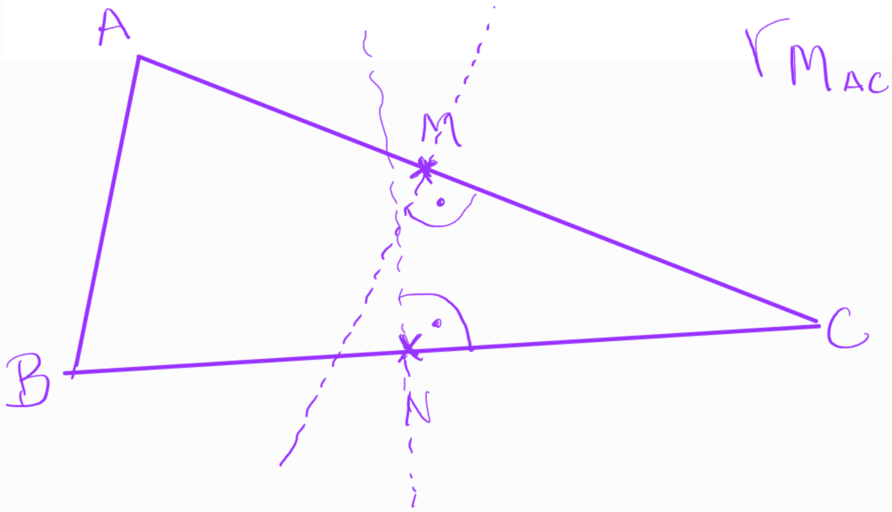
b) **(1,25 puntos)** Simplifica la expresión: $\dfrac{3^{n-2}\cdot(n+3)!}{3^n\cdot\binom{n+3}{3}}=$

$=3^{n-2-n}\cdot\dfrac{(n+3)!}{\dfrac{(n+3)!}{3!\,(n+\cancel{3}-\cancel{3})!}}=3^{-2}\cdot\dfrac{\cancel{(n+3)!}\cdot n!\cdot3!}{\cancel{(n+3)!}}=$

$=\dfrac{n!\cdot\cancel{3}\cdot2\cdot1}{3^{\cancel{2}}}=\boxed{\dfrac{2n!}{3}}$

Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Dado el triángulo de vértices A(-2, -1), B(-1, 2) y C(3, 1) halla su circuncentro (punto de corte de las mediatrices).



$$r_{M_{AC}} \begin{cases} M \in r_{M_{AC}} \text{ pto medio } \overline{AC} \\ r_{M_{AC}} \perp \vec{AC} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{AC}$$

$$M = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$$

$$M = (1/2, 0)$$

$$\vec{AC} = (3,1) - (-2,-1) = (5,2) = \vec{n}$$

$$r_{M_{AC}} \begin{cases} M(1/2, 0) \\ \vec{n}(5,2) \Rightarrow \vec{v} = (2,-5) \end{cases} \Rightarrow r_{M_{AC}} \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = -5\lambda \end{cases}$$

$$r_{M_{BC}} \begin{cases} N \in r_{M_{BC}} \text{ pto medio } \overline{BC} \Rightarrow N = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (1, 3/2) \\ r_{M_{BC}} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{n} = \vec{BC} = (3,1) - (-1,2) = (4,-1) \end{cases}$$

$$r_{M_{BC}}: 4(x-1) - 1(y - 3/2) = 0$$

$$4x - y - 4 + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 4x - y - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 2y - 5 = 0 : r_{M_{BC}}$$

$$\text{CIRCUNCENTRO} = r_{M_{AC}} \cap r_{M_{BC}}$$

Sustituyo paramétricas ($r_{M_{AC}}$) en general ($r_{M_{BC}}$)

$$8\cdot\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)-2\cdot(-5\lambda)-5=0$$

$$4+16\lambda+10\lambda-5=0$$

$$26\lambda-1=0$$

$$26\lambda=1$$

$$\lambda=\frac{1}{26}$$ que sustituyo en V_{MAC}

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{26}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{13}=\frac{13+2}{26}=\frac{15}{26} \\ y=-5\cdot\left(\frac{1}{26}\right)=-\frac{5}{26} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{CIRCUNCENTRO}=\left(\frac{15}{26},-\frac{5}{26}\right)}$$

Ejercicio 6 (2,5 puntos)

a) Calcula k para que las rectas r: kx + y = 12 y s: 4x – 3y = k+1 sean paralelas.

b) Calcula la distancia entre ellas para ese valor de k.

a) $r \parallel s \iff \frac{K}{4}=\frac{1}{-3}\neq\frac{12}{K+1} \Rightarrow -3K=4 \Rightarrow \boxed{K=-\frac{4}{3}}$

Comprobación:

$$\frac{12}{-\frac{4}{3}+1}=\frac{12}{-\frac{1}{3}}=-36 \quad \nparallel$$

b) $r: \frac{4}{3}x+y-12=0 \Rightarrow 4x+3y-36=0$

$d(r,s)=d(P_r,s)$ $\quad P_r \rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x-36=0 \\ 4x=36 \Rightarrow \underline{x=9} \end{cases}$

$P_r = (9,0)$ $\quad s: 4x - 3y = -\frac{4}{3} + 1 \Rightarrow 4x - 3y = -\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 12x - 9y + 1 = 0 \; : s$$

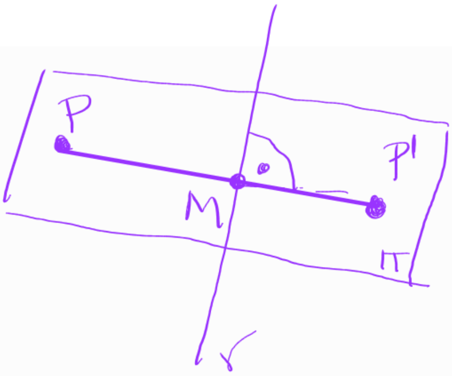
$$d(P_r, s) = \frac{|12 \cdot 9 - \cancel{9 \cdot 0} + 1|}{\sqrt{12^2 + (-9)^2}} = \frac{|109|}{\sqrt{\underbrace{144+81}_{225}}} =$$

$$= \boxed{\frac{109}{15}\, u}$$

Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Calcula el simétrico del punto P(1,1) respecto de la recta r: y = 3x - 7

$$\underbrace{r: 3x - y - 7 = 0}_{\vec{n}_r = (3,-1) \Rightarrow \vec{v}_r = (1,3)}$$



M pto medio de PP' y $M = r \cap \pi$

donde $\pi \begin{cases} P(1,1) \in \pi \\ \pi \perp r \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r(1,3) \end{cases}$

$$\pi: 1 \cdot (x-1) + 3(y-1) = 0$$

$$x - 1 + 3y - 3 = 0$$

$$\pi: x + 3y - 4 = 0$$

$$r \cap \pi \Rightarrow x + 3(3x-7) - 4 = 0$$

$r: y = 3x-7$

$$x + 9x - 21 - 4 = 0$$

$$x + 9x - 25 = 0$$

$$10x = 25$$

$$x = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$y = 3 \cdot \frac{5}{2} - 7 = \frac{15}{2} - 7 = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{M = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{M \text{ pto medio } PP'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 5 = 1 + x_{P'} \Rightarrow x_{P'} = 4 \\ \frac{1}{2} = \frac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 1 = 1 + y_{P'} \Rightarrow y_{P'} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{P'(4,0)}$$

Ejercicio 8

a) **(1,25 puntos)** Demuestra que los vectores $\vec{u} = (1,-2) y \vec{v}(3,1)$forman base de V^2.

Calcula las coordenadas del vector (-2, 6) en esa base.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1,-2) \\ \vec{v} = (3,1) \end{array}\right\} \quad \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{1} \Rightarrow \underbrace{\vec{u} \neq \lambda \vec{v}}_{\text{No proporcionales}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Son l.i.} \Rightarrow B = \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ forman BASE}$$

$$(-2,6) = \alpha(1,-2) + \beta(3,1)$$

$$(-2,6) = (\alpha, -2\alpha) + (3\beta, \beta)$$

$$\begin{cases} -2 = \alpha + 3\beta \\ 6 = -2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} -4 = 2\alpha + 6\beta \\ 6 = -2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\oplus\ 2 = \cancel{\ }\ 7\beta \Rightarrow \beta = \frac{2}{7}$$

$$6 = -2\alpha + \frac{2}{7} \Rightarrow 6 - \frac{2}{7} = -2\alpha$$

$$\frac{40}{7} = -2\alpha$$

$$\frac{\cancel{40}^{20}}{7\cdot(-\cancel{2})} = \alpha$$

$$-\frac{20}{7} = \alpha$$

$$(-2,6) \longrightarrow \boxed{\left(-\frac{20}{7}, \frac{2}{7}\right)}$$

b) **(1,25 puntos)** Calcula el valor de k para que los vectores

$\vec{u} = (1 + k, +2)$ y $\vec{v} = (k, k - 2)$ sean perpendiculares

¿k? t.q. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$$(1+k, +2)\cdot(k, k-2) = 0$$

$$(1+k)\cdot k + (+2)(k-2) = 0$$

$$k + k^2 + 2k - 4 = 0$$

$$k^2 + 3k - 4 = 0 \begin{cases} \oplus\ -3 \\ \odot\ -4 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} k_1 = -4 \\ k_2 = 1 \end{matrix}}$$