

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) [1 punto] $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1+4x+4x^2}{3} = -2 - \frac{(2x-1)(2x+1)}{3}$

b) [1 punto] $\sqrt{20+x} - \sqrt{2x-1} = 2$

Debes indicar cuál de los resultados es realmente solución de la ecuación y cuál no.

c) [1,5 puntos] $\frac{x-3}{x^2-4} = 3 - \frac{x}{x-2}$

2. [1,5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$$

3. [1 punto] Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones de primer grado. Realiza la representación gráfica de la solución y exprésala en forma de intervalo.

$$\begin{cases} -\frac{x-1}{2} - \frac{2(x+1)}{5} \leq 1 \\ \frac{x}{6} - \frac{3x+1}{4} > -2 \end{cases}$$

4. Resolver las siguientes inecuaciones. Expresa la solución final en forma de intervalo.

a) [1 punto] $\frac{(x+1)(x-1)+3}{3} - \frac{(x-1)^2+2x}{4} \leq 1 - \frac{x+7}{12}$

b) [2 puntos] $\frac{x}{x+5} > x$

5. [1 punto] **Problema.** Para resolverlo debes declarar la o las incógnitas y plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Paloma vendió los dos quintos de una colección de cómics que tenía y luego compró 100 más. Tras esto tenía el mismo número que si hubiese comprado desde el principio 40 cómics. ¿Cuántos cómics tenía Paloma al principio?

$$\textcircled{1} \text{ a) } \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1+4x+4x^2}{3} = -2 - \frac{(2x+1)(2x-1)}{3};$$

$$\frac{x^2-2x+1}{2} - \frac{1+4x+4x^2}{3} = -2 - \frac{4x^2-1}{3};$$

$$3x^2-6x+3-2-8x-8x^2 = -12-8x^2+2;$$

$$3x^2-14x+11=0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-4 \cdot 3 \cdot 11}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{14 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt{20+x} - \sqrt{2x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{20+x} = 2 + \sqrt{2x-1} \Rightarrow$$

$$20+x = 4 + 4\sqrt{2x-1} + 2x-1 \Rightarrow 17-x = 4\sqrt{2x-1} \Rightarrow$$

$$289-34x+x^2 = 16(2x-1) \Rightarrow x^2-66x+305=0$$

$$x = \frac{66 \pm \sqrt{4356-4 \cdot 1 \cdot 305}}{2} = \frac{66 \pm \sqrt{3136}}{2} = \frac{66 \pm 56}{2} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = 61 & \sqrt{20+61} - \sqrt{2 \cdot 61 - 1} = 9 - 11 = -2 \neq 2 \\ & \Rightarrow 61 \text{ NO ES SOLUCIÓN.} \\ x_2 = 5 & \sqrt{20+5} - \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 5 - 3 = 2 \\ & \Rightarrow 5 \text{ SÍ ES SOLUCIÓN.} \end{cases}$$

$$\text{c) } \frac{x-3}{x^2-4} = 3 - \frac{x}{x-2}; \quad \frac{x-3}{(x+2)(x-2)} = 3 - \frac{x}{x-2};$$

$$x-3 = 3(x+2)(x-2) - x(x+2);$$

$$x-3 = 3x^2-12-x^2-2x; \quad -2x^2+3x+9=0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(-2)9}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{-4} = \frac{-3 \pm 9}{-4} = \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{x}$. Sustituyendo en la 1ª:

$$x^2 + \left(\frac{-1}{x}\right)^2 = \frac{82}{9} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9} \Rightarrow 9x^4 + 9 = 82x^2 \Rightarrow$$

$$9x^4 - 82x^2 + 9 = 0 \quad [x^2 = z] \quad 9z^2 - 82z + 9 = 0$$

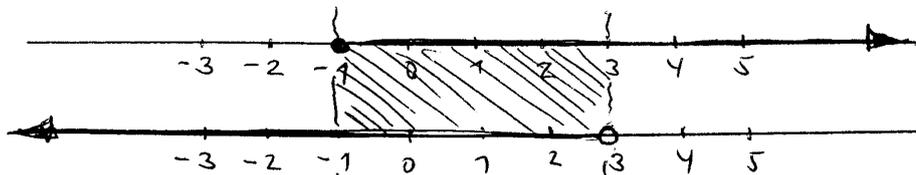
$$z = \frac{82 \pm \sqrt{6724-4 \cdot 9 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{82 \pm \sqrt{6400}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} = \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

* Si $z=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow y = \mp \frac{1}{3}$

* Si $z = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow y = \mp 3$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2(x+1)}{5} \leq 1 \\ \frac{x}{6} - \frac{3x+1}{4} > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+5-4x-4 \leq 10 \\ 2x-9x-3 > -24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5x-4x \leq 10-5+4 \\ 2x-9x > -24+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x \leq 9 \\ -7x > -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \end{cases}$$



Solución: $[-1, 3)$

$$\textcircled{4} \text{ a) } \frac{(x+1)(x-1)+3}{3} - \frac{(x-1)^2+2x}{4} \leq 1 - \frac{x+7}{12};$$

$$\frac{x^2-1+3}{3} - \frac{x^2-2x+1+2x}{4} \leq 1 - \frac{x+7}{12}; \quad \frac{x^2+2}{3} + \frac{x^2+1}{4} \leq 1 - \frac{x+7}{12};$$

$$4x^2+8-3x^2-3 \leq 12-x-7; \quad x^2+x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0 \quad \text{Raíces } x=0, x=-1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
x	-	-	+
$x+1$	-	+	+
$x(x+1)$	+	-	+

Solución: $[-1, 0]$

$$\text{b) } \frac{x}{x+5} > x; \quad \frac{x}{x+5} - x > 0; \quad \frac{x}{x+5} - \frac{x^2+5x}{x+5} > 0;$$

$$\frac{-x^2-4x}{x+5} > 0 \quad \frac{-x(x+4)}{x+5} > 0. \quad \text{Raíces: } 0, -4, -5$$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x$	+	+	+	-
$x+4$	-	-	+	+
$x+5$	-	+	+	+
$\frac{-x(x+4)}{x+5}$	+	-	+	-

Solución: $(-\infty, -5) \cup (-4, 0)$

$\textcircled{5}$ Cómics: x

$$\boxed{x - \frac{2}{5}x + 100 = x + 40} \Rightarrow 5x - 2x + 500 = 5x + 200$$

$$\rightarrow -2x = -300 \Rightarrow \underline{x = 150}$$

Paloma tenía al principio 150 cómics.