1. **[1,5 puntos]** Realiza las siguientes operaciones en las que aparecen radicales.

   a) $\left(-3\sqrt{2}\right)^2$; b) $-5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{7}$; c) $\dfrac{4\sqrt{3}\cdot 16\sqrt{5}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}$

2. **[1 puntos]** Extrae de la raíz todos los factores que sea posible. Para ello tienes que factorizar previamente el radicando.

   a) $\sqrt{648}$; b) $\sqrt{6750}$

3. **[1 punto]** Realiza las siguientes sumas y restas en las que aparecen radicales.
   Nota: *recuerda que para hacer la operación previamente deberás extraer factores de algunos radicales.*

   a) $5\sqrt{18}-\sqrt{8}+2\sqrt{72}$; b) $2\sqrt{24}-5\sqrt{54}+12\sqrt{600}$

4. En una progresión aritmética se sabe que el término que ocupa el tercer lugar es 1 y el término que ocupa el séptimo lugar es 13. Calcula:

   a) **[1 punto]** La diferencia, el primer término y el término general.
   b) **[1 punto]** La suma de los veinte primeros términos.

5. Dada la progresión geométrica: $6\ ;\ 4\ ;\ \dfrac{8}{3}\ ;\ \dfrac{16}{9}\ ;\ \dfrac{32}{27}\ ;\ \ldots\ldots$, calcula:

   a) **[1 punto]** La razón y el término que ocupa el séptimo lugar (debes expresarlos simplificados en forma de fracción).
   b) **[1 punto]** Usar la fórmula de la suma para calcular la suma de los cinco primeros términos (valor exacto).
   c) **[1 punto]** La suma de todos los términos de la progresión (valor exacto).

Problema

6. Un balón de baloncesto se deja caer desde una altura de 50 metros y cada vez que bota sube a una altura igual a $\dfrac{3}{5}$ de la máxima altura conseguida anteriormente.

   a) **[0,5 puntos]** Escribe los cinco primeros términos de la sucesión de las alturas que alcanza el balón antes de volver a caer.
   b) **[0,5 puntos]** Cuando toca el suelo por décima vez, ¿cuántos metros ha recorrido el balón?

      Indicación: para hacer este apartado usa la calculadora con un redondeo a cinco cifras decimales.

   c) **[0,5 punto]** Si el balón estuviera botando "infinitamente", ¿cuántos metros recorrería?

Soluciones

1. Realiza las siguientes operaciones en las que aparecen radicales.

   a) $\left(-3\sqrt{2}\right)^2 = \left(-3\right)^2 \sqrt{2}^2 = 9\cdot 2 = 18$

   b) $-5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{7} = -10\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{7} = -40\sqrt{42}$

   c) $\dfrac{4\sqrt{3}\cdot 16\sqrt{5}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{64\sqrt{15}}{2^2\sqrt{2}^2} = \dfrac{64\sqrt{15}}{4\cdot 2} = \dfrac{64\sqrt{15}}{8} = 8\sqrt{15}$

2. Extrae de la raíz todos los factores que sea posible. Para ello tienes que factorizar previamente el radicando.

   a) $\sqrt{648} = \sqrt{2^3\cdot 3^4} = 2\cdot 3^2\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

   b) $\sqrt{6750} = \sqrt{2\cdot 3^3\cdot 5^3} = 3\cdot 5\sqrt{2\cdot 3\cdot 5} = 15\sqrt{30}$

3. Realiza las siguientes sumas y restas en las que aparecen radicales.

   a) $5\sqrt{18} - \sqrt{8} + 2\sqrt{72} = 5\sqrt{2\cdot 3^2} - \sqrt{2^3} + 2\sqrt{2^3\cdot 3^2} = 5\cdot 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2\cdot 2\cdot 3\sqrt{2} =$

   $= 15\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = \left(15 - 2 + 12\right)\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$

   b) $2\sqrt{24} - 5\sqrt{54} + 12\sqrt{600} = 2\sqrt{2^3\cdot 3} - 5\sqrt{2\cdot 3^3} + 12\sqrt{2^3\cdot 3\cdot 5^2} =$

   $= 2\cdot 2\sqrt{2\cdot 3} - 5\cdot 3\sqrt{2\cdot 3} + 12\cdot 2\cdot 5\sqrt{2\cdot 3} = 4\sqrt{6} - 15\sqrt{6} + 120\sqrt{6} = 109\sqrt{6}$

4. En una progresión aritmética se sabe que el término que ocupa el tercer lugar es 1 y el término que ocupa el séptimo lugar es 13. Calcula:

   a) La diferencia, el primer término y el término general.

   $a_7 = a_3 + \left(7-3\right)d \Rightarrow 13 = 1 + 4d \Rightarrow 12 = 4d \Rightarrow d = 3$.

   $a_7 = a_1 + \left(7-1\right)d \Rightarrow 13 = a_1 + 6\cdot 3 \Rightarrow 13 = a_1 + 18 \Rightarrow a_1 = -5$.

   $a_n = a_1 + \left(n-1\right)d \Rightarrow a_n = -5 + \left(n-1\right)\cdot 3 \Rightarrow a_n = -5 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n - 8$.

   b) La suma de los veinte primeros términos.

   $a_{20} = a_1 + \left(20-1\right)d \Rightarrow a_{20} = -5 + 19\cdot 3 \Rightarrow a_{20} = -5 + 57 \Rightarrow a_{20} = 52$.

   $S = \dfrac{\left(a_1 + a_{20}\right)20}{2} = \dfrac{\left(-5+52\right)20}{2} = \dfrac{47\cdot 20}{2} = \dfrac{940}{2} = 470$.

5. Dada la progresión geométrica: $6\ ;\ 4\ ;\ \dfrac{8}{3}\ ;\ \dfrac{16}{9}\ ;\ \dfrac{32}{27}\ ;\ ......$, calcula:

   a) La razón y el término que ocupa el séptimo lugar (debes expresarlos simplificados en forma de fracción).

   $r = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

   $a_7 = a_1\cdot r^{7-1} \Rightarrow a_7 = 6\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 = 6\cdot\dfrac{64}{729} = \dfrac{384}{729} = \dfrac{128}{243}$

   El término que ocupa el séptimo lugar también se puede calcular multiplicando por la razón el quinto y luego el sexto:

   $a_5 = \dfrac{32}{27} \Rightarrow a_6 = \dfrac{32}{27}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{64}{81} \Rightarrow a_7 = \dfrac{64}{81}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{128}{243}$

b) Usar la fórmula de la suma para calcular la suma de los cinco primeros términos (valor exacto).

$$S=\frac{6\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^5-1\right)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{6\left(\frac{32}{243}-1\right)}{-\frac{1}{3}}=\frac{6\left(\frac{32}{243}-\frac{243}{243}\right)}{-\frac{1}{3}}=\frac{6\left(-\frac{211}{243}\right)}{-\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{1266}{243}}{-\frac{1}{3}}=\frac{3798}{243}=\frac{422}{27}$$

c) La suma de todos los términos de la progresión (valor exacto).

Como la razón es menor que uno podemos aplicar la siguiente fórmula: $S=\frac{a_1}{1-r}$. Entonces:

$$S=\frac{6}{1-\frac{2}{3}}=\frac{6}{\frac{1}{3}}=\frac{6\cdot 3}{1}=\frac{18}{1}=18.$$

Problema

6. Un balón de baloncesto se deja caer desde una altura de 50 metros y cada vez que bota sube a una altura igual a $\frac{3}{5}$ de la máxima altura conseguida anteriormente.

a) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión de las alturas que alcanza el balón antes de volver a caer.

$$a_1=50\ ;\ a_2=50\cdot\frac{3}{5}=\frac{150}{5}=30\ ;\ a_3=30\cdot\frac{3}{5}=\frac{90}{5}=18\ ;a_4=18\cdot\frac{3}{5}=\frac{54}{5}\ ;\ a_5=\frac{54}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{162}{25}$$

Por tanto, los 5 primeros términos son: $50\ ;\ 30\ ;\ 18\ ;\ \frac{54}{5}\ ;\ \frac{162}{25}$

b) Cuando toca el suelo por décima vez, ¿cuántos metros ha recorrido el balón?
Indicación: para hacer este apartado usa la calculadora con un redondeo a cinco cifras decimales.

Tenemos que calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión.

$$S=\frac{50\cdot\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{10}-1\right)}{\frac{3}{5}-1}=\frac{50\cdot\left(0,6^{10}-1\right)}{0,6-1}=\frac{50\cdot\left(0,00605-1\right)}{-0,4}=\frac{50\cdot\left(-0,99395\right)}{-0,4}=\frac{-49,6975}{-0,4}=124,24375$$

Por tanto, el balón ha recorrido $124,24375$ metros.

c) Si el balón estuviera botando "infinitamente", ¿cuántos metros recorrería?

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{50}{1-0,6}=\frac{50}{0,4}=125 \text{ metros.}$$