OPCIÓN A

1.- Sea la función $f(x)=e^{x^2+ax+b}$

a) Calcular $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que $\boldsymbol{f(x)}$ tenga un extremo en el punto **(1 , 1)**. (1,5 puntos)

b) Calcular los extremos de la función $f(x)$ cuando a = 0 y b = 0. (1 punto)

$a)$

$$f'(x)=(2x+a)\,e^{x^2+ax+b} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=e^{1^2+a\cdot 1+b}=1 \Rightarrow e^{a\cdot+b+1}=1 \Rightarrow \ln e^{a\cdot+b+1}=\ln 1 \Rightarrow (a+b+1)\ln e=0 \\ f'(1)=0 \Rightarrow (2\cdot 1+a)\,e^{1^2+a\cdot 1+b}=0 \Rightarrow 2+a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b+1)\cdot 1=0 \Rightarrow a+b+1=0 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow -2+b+1=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow f(x)=e^{x^2-2x+1}$$

$b)$

$$f(x)=e^{x^2} \Rightarrow f'(x)=2xe^{x^2} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow 2xe^{x^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} 2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x>0 \\ e^{x^2}>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

2 > 0	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
e^{x^2} **> 0**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x\in\Re / x>0$ **Decreciente** $\forall x\in\Re / x<0$

Mínimo relativo $x=0 \Rightarrow f(0)=e^{0^2}=e^0=1$ de decreciente pasa a creciente

2.- Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a) $\int \frac{5\,dx}{(3x-1)^2}$ (0,75 puntos)

b) $\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (1 punto)

c) $\int \frac{(x+1)^3}{2x}\,dx$ (0,75 puntos)

$a)$

$$\int \frac{5\,dx}{(3x-1)^2}=5\int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2}=\frac{5}{3}\int \frac{dt}{t^2}=\frac{5}{3}\int t^{-2}dt=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1}=-\frac{5}{3}\cdot t^{-1}=-\frac{5}{3t}=-\frac{5}{3(3x-1)}+K$$

$$3x-1=t \Rightarrow 3\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

$b)$

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-t}{t}\,dt + 4\cdot arc\ sen\ x = -\int dt + 4\cdot arc\ sen\ x$$

$$1-x^2 = t^2 \Rightarrow -2x\,dx = 2tdt \Rightarrow xdx = -t\,dt$$

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -t + 4\cdot arc\ sen\ x = -\sqrt{1-x^2} + 4\cdot arc\ sen\ x + K$$

$c)$

$$\int \frac{(x+1)^3}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + \frac{3}{2}\int x\,dx + \frac{3}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(x+1)^3}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot \ln x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2 + 3\cdot x + \ln x\right) + K$$

3.- Estudiar el sistema siguiente para los distintos valores del parámetro **m**. Resolverlo cuando m = 3.

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \end{cases}$$ **(2,5 puntos)**

Es un sistema homogéneo con soluciones compatibles, determinado cuando el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo, siendo indeterminado cuando es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -m & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ m+1 & 0 & 20 \\ 2-m^2 & 0 & 4-13m \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} m+1 & 20 \\ 2-m^2 & 4-13m \end{vmatrix} = (m+1)(4-13m) - 40 + 20m^2$$

$$|A| = 4m - 13m^2 + 4 - 13m - 40 + 20m^2 = 7m^2 - 9m - 36 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 7m^2 - 9m - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4\cdot 7\cdot(-36) = 81 + 1008 = 1089 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{1089}}{2\cdot 7} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{9+33}{14} = \frac{42}{14} = 3 \\ m = \frac{9-33}{14} = \frac{-24}{14} = -\frac{12}{7} \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \left\{-\frac{12}{7}\ ,\ 3\right\} \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Solución\ trivial \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

Continuación del Problema 3 de la opción A

$$Para\ m=-\frac{12}{7} \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.Compatible\ Indeterminado$$

$$Para\ m=3 \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.Compatible\ Indeterminado$$

$$Cuando\ m=3 \Rightarrow Compatible\ Indeterminado\ (el\ unico\ con\ soluciones)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.Compatible\ Indeterminado \Rightarrow$$

$$y+2z=0 \Rightarrow y=-2z \Rightarrow x-2z+7z=0 \Rightarrow x=-5z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-5\lambda\ ,\ -2\lambda\ ,\ \lambda)$$

4.- Sea P el punto de coordenadas $P(1\ ,\ 0\ ,1)$ y r la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=1 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación en forma continua de una recta que pase por el punto P y sea paralela a la recta r. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación general de un plano que pase por el punto P y contenga a la recta r . (1,25 puntos)

a) La recta pedida **s** tiene el mismo vector director que la recta **r**

$$x=1+2z \Rightarrow 1+2z+y-z=0 \Rightarrow y=-1-z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}=(2\ ,-1\ ,1) \Rightarrow$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z-1$$

b) El plano π queda definido por el vector director de la recta **r**, por el vector **PR**, siendo **R** un punto cualquiera de dicha recta (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el vector **PG**, siendo **G** el punto genérico o generador del plano. Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto, que daría como resultado el volumen del paralelepípedo que formarian, es nulo y la ecuación pedida del plano.

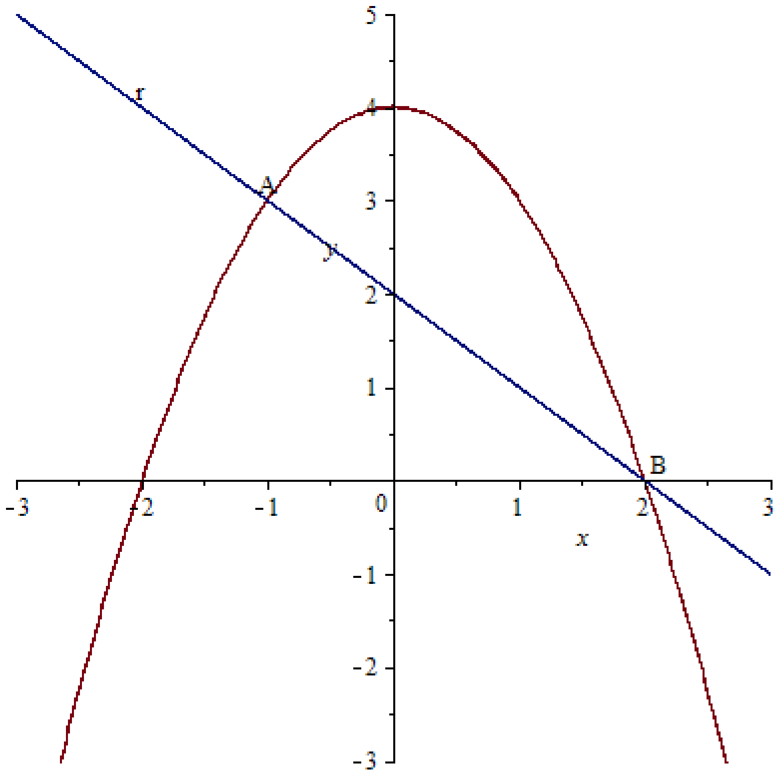
$$Siendo\ R(1\ ,-1\ ,\ 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{PR}=(1\ ,-1\ ,\ 0)-(1\ ,\ 0\ ,1)=(0\ ,-1\ ,-1)\equiv(0\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{PG}=(x\ ,\ y\ ,\ z)-(1\ ,\ 0\ ,1)=(x-1\ ,\ y\ ,\ z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-(x-1)+2\,(z-1)-(x-1)-2y=0 \Rightarrow -2\,(x-1)-2y+2\,(z-1)=0 \Rightarrow x-1+y-z+1=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x+y-z=0$$

OPCIÓN B

1.- En la figura siguiente se muestran la parábola de ecuación $f(x) = 4 - x^2$ y la recta r que pasa por los puntos **A** y **B** de la parábola de abscisas respectivas **−1** y **2**. Hallar la ecuación de una recta **s** tangente a la parábola $f(x)$ y paralela a **r**. (2,5 puntos)



La recta r pasa, asimismo, por los puntos (0 , 2) , (2 , 0) y (-1 , 4 - (-1)^2) = (-1 , 3)

$$Pendiente\ de\ r \Rightarrow m = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

$$y - \frac{15}{4} = (-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4y - 15 = -4x + 2 \Rightarrow s \equiv 4x + 4y - 17 = 0$$

2.- Calcular el área de la región plana limitada por la curva $y=x\,(x-2)\,(x-3)$ y la recta de ecuación $y = 0$. (2,5 puntos)

La recta y = 0 es el eje OX

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x\,(x-2)\,(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$0 < 1 < 2 \Rightarrow y(1) = 1\,(1-2)\,(1-3) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2 > 0$$

$$2 < \frac{5}{2} < 3 \Rightarrow y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 2\right)\left(\frac{5}{2} - 3\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} < 0$$

Continuación del Problema

$$y = x\left(x^2 - 5x + 6\right) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$A = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) dx + \left| \int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) dx \right| = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) dx - \int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) dx$$

$$A = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^2 - 5 \cdot \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 + 6 \cdot \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^2 - \frac{1}{4}\left[x^4\right]_2^3 + 5 \cdot \frac{1}{3}\left[x^3\right]_2^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^2 =$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left(2^4 - 0^4\right) - \frac{5}{3}\left(2^3 - 0^3\right) + 3 \cdot \left(2^2 - 0^2\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(3^4 - 2^4\right) + \frac{5}{3}\left(3^3 - 2^3\right) - 3 \cdot \left(3^2 - 2^2\right)$$

$$A = \frac{16}{4} - \frac{40}{3} + 12 - \frac{81-16}{4} + \frac{5 \cdot (27-8)}{3} - 3 \cdot (9-4) = 16 - \frac{40}{3} - \frac{65}{4} + \frac{95}{3} - 15 = 1 + \frac{55}{3} - \frac{65}{4}$$

$$A = \frac{12 + 220 - 195}{12} = \frac{37}{12}$$

3.- Determinar los valores de los parámetros **a** y **b** para los que tiene inversa la matriz

$A=\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$ (1,5 puntos)

Calcular la matriz $\mathbf{A^{-1}}$ cuando **a = 3** y **b = 1**. (1 punto)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b\Rightarrow \forall a,b\in\Re\Rightarrow a=b\Rightarrow No\ existe\ A^{-1}$$

$$\forall a,b\in\Re\Rightarrow a\neq b\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$$|A|=(3-1)^2=2^2=4\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\beta_1\equiv\begin{cases} x=-1+3\lambda-2\mu \\ y=4+\lambda \\ z=-2+2\lambda-5\mu \end{cases}\qquad \beta_2\equiv x+y+z=2\qquad \beta_3\equiv\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$ (2,5 puntos)

$$\beta_1\equiv\begin{vmatrix} x+1 & 3 & -2 \\ y-4 & 1 & 0 \\ z+2 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -5(x+1)-4(y-4)+2(z+2)+15(y-4)=0\Rightarrow$$

$$-5(x+1)+11(y-4)+2(z+2)=0\Rightarrow \beta_1\equiv 5x-11y-2z+45=0$$

$$\beta_3\equiv\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 2(x-2)+2(y+1)+3z-4z-3(x-2)-(y+1)=0\Rightarrow$$

$$-(x-2)+(y+1)-z=0\Rightarrow \beta_3\equiv x-y+z-3=0$$

Si el sistema que forman los tres planos es Compatible Determinado, se cortan en un punto, si el sistema es Compatible Indeterminado se cortaran según una recta que va desde que sea la misma hasta que se corten en tres rectas paralelas, y si es Incompatible habrá planos paralelos, estudiaremos cada caso según sea el sistema.

$$\begin{cases} \beta_1\equiv 5x-11y-2z=-45 \\ \beta_2\equiv x+y+z=2 \\ \beta_3\equiv x-y+z=3 \end{cases}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 5 & -11 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & -13 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=14\neq 0\Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado\Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cor\tan\ en\ un\ punto$$

Continuación del problema 4 de la opción B

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -11 & -2 & -45 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -13 & 0 & -39 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 7x - 13 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -39 \Rightarrow$$

$$7x = -39 - \frac{13}{2} = \frac{-78-13}{2} = -\frac{91}{2} \Rightarrow x = -\frac{91}{14} \Rightarrow -\frac{91}{14} + \frac{1}{2} + z = 3 \Rightarrow z = 3 + \frac{91}{14} - \frac{1}{2} = \frac{42+91-7}{14} = \frac{126}{14}$$

$$Punto \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(-\frac{91}{14}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{63}{7}\right)$$