

OPCIÓN A

1.- Se sabe que la gráfica de $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$ tiene una recta tangente horizontal en el punto $P(2, 4)$.

Hallar los valores de a y b . (2,5 puntos)

$$f'(x) = \frac{2ax - (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{2ax^2 - ax^2 - b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{a \cdot 2^2 - b}{2^2} = 0 \Rightarrow 4a - b = 0$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow \frac{a \cdot 2^2 + b}{2} = 4 \Rightarrow 4a + b = 8$$

$$\begin{cases} 4a - b = 0 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$$

2.- La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x) = 1.500x + 1.000.000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x) = 4.000 - x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo? (2,5 puntos)

Siendo x el número de tabletas vendidas

$$\text{Ganancias} \Rightarrow G(x) = x \cdot P(x) - C(x) = x(4000 - x) - (1500x + 1000000) = 4000x - x^2 - 1500x - 1000000$$

$$G(x) = -x^2 + 2500x - 1000000 \Rightarrow G'(x) = \frac{dG(x)}{dx} = -2x + 2500 \Rightarrow \text{Si } G'(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x - 1250) = 0 \Rightarrow$$

$$x - 1250 = 0 \Rightarrow x = 1250$$

$$G''(x) = \frac{d^2G(x)}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow x = 1250 \text{ tablets}$$

3.- Estudiar el sistema siguiente para los distintos valores del parámetro m y resolverlo en los casos en que

$$\text{sea posible } \begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & m & m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 1 \\ m & m \end{vmatrix} = m^2 - m = (m-1)m \Rightarrow \text{Como } |A| = 0 \Rightarrow (m-1)m = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Numero incognitas} \Rightarrow \text{Sist Compatible Deter min ado}$$

Continuación Problema 3 de la Opción ASi $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Numero incognitas} \Rightarrow$$

Compatible Indeterminado $\Rightarrow z = 0 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, 0)$ Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Soluciones cuando el Sistema es Compatible Determinado $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m \end{array}\right) \Rightarrow (m-1)z = m \Rightarrow z = \frac{m}{m-1} \Rightarrow my + \frac{m}{m-1} = 0 \Rightarrow$$

$$my = -\frac{m}{m-1} \Rightarrow y = -\frac{m}{m(m-1)} = -\frac{1}{m-1} \Rightarrow x - \frac{1}{m-1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m-1} + 1 = \frac{1+m-1}{m-1} = \frac{m}{m-1}$$

4.- Dados los puntos $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 4, 1)$ y $C(-4, 3, 1)$:a) Estudiar si los puntos A, B y C están alineados. (1,25 puntos)b) Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento AB y que pasa por C . Expresarla como intersección de dos planos. (1,25 puntos)a) Si los puntos están alineados los vectores AB y AC son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 4, 1) - (-1, 0, 3) = (3, 4, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, 3, 1) - (-1, 0, 3) = (-3, 3, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{-3} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \text{No están alineados}$$

b) La recta buscada r tiene como vector director al vector AB y pasa por C , de aquí:

$$r \equiv \frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} 4x+16 = 3y-9 \\ -2y+6 = 4z-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3y+25 = 0 \\ 2y+4z-10 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-3y+25 = 0 \\ y+2z-5 = 0 \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (0,75 puntos)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ (0,75 puntos)

d) Calcular el valor de m de tal forma que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - mx)(2x + 3)}{x^2 + 4} = 6$ (1 punto)

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos 0}{0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{\sin 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} &= \frac{1 - \sqrt{1 - 0^2}}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^2}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{0}{1 + \sqrt{1 - 0^2}} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - mx)(2x + 3)}{x^2 + 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3 - 2mx^2 - 3mx}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2mx^2 + (2 - 3m)x + 3}{x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2m \frac{x^2}{x^2} + (2 - 3m) \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2m + \frac{(2 - 3m)}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{-2m + \frac{(2 - 3m)}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{4}{\infty}} = \\ &= \frac{-2m + 0 + 0}{1 + 0} = -2m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - mx)(2x + 3)}{x^2 + 4} = 6 \Rightarrow -2m = 6 \Rightarrow m = -3 \end{aligned}$$

2.- Dadas las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, se pide:

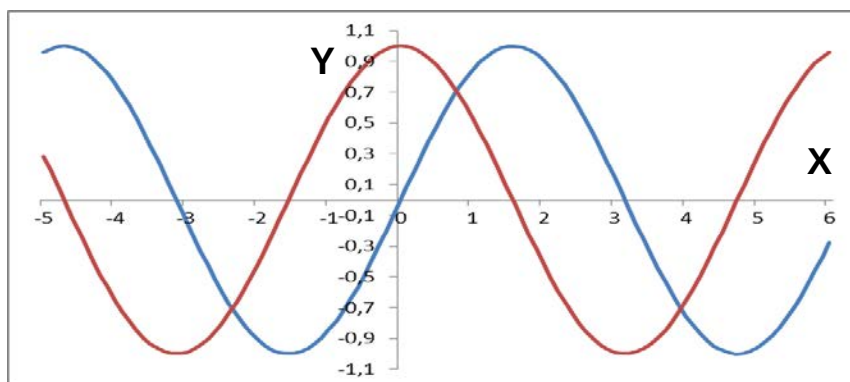
a) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ y } x = \pi. \text{ (1,25 puntos)}$$

b) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ y } x = 2\pi. \text{ (1,25 puntos)}$$

Continuación del problema 2 de la opción B



a)

$$\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = -[\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_1 = -\left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{4}\right) - \left(\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) = -\left[(-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = (1 + \sqrt{2})u^2$$

b)

$$A_2 = A_1 + \left| \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, dx \right| - \left| \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx \right| + \left| \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx \right| - \left| \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx + \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \right|$$

$$A_2 = A_1 - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= A_1 - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x \, dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = A_1 - [\operatorname{sen} x]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} - [\cos x]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} + [\cos x]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\operatorname{sen} x]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$A_2 = A_1 - \left(\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen} \pi\right) - \left(\cos \frac{5\pi}{4} - \cos \pi\right) + \left(\cos 2\pi - \cos \frac{5\pi}{4}\right) + \left(\operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$A_2 = A_1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\right] + \left[0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$A_2 = A_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = A_1 + \sqrt{2} + \frac{2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{2} = A_1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$A_2 = (1 + 3\sqrt{2})u^2$$

3.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar las matrices X e Y de dimensiones 2×3

3 tales que verifican el sistema matricial $\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases}$ **(2,5 puntos)**

$$\begin{cases} 6X + 2Y = 2A \\ -4X - 2Y = -B \end{cases} \Rightarrow 2X = 2A - B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(2A - B) = \frac{1}{2} \left[2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 12X + 4Y = 4A \\ -12X - 6Y = -3B \end{cases} \Rightarrow -2Y = 4A - 3B \Rightarrow Y = -\frac{1}{2}(4A - 3B) = -\frac{1}{2} \cdot \left[4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \right]$$

$$Y = -\frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 6 & 3 & 24 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Determinar el valor de α para que la recta r de ecuación: $r: \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ sea paralela al plano

$$\beta \equiv x - \alpha y + 10z = -3$$

Si una recta y un plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo.

$$3x + 3z = 5 \Rightarrow x + z = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} - z \Rightarrow \frac{5}{3} - z - y + 2z = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 1, 1) \\ \vec{v}_\beta = (1, -\alpha, 10) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\beta \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\beta = 0 \Rightarrow (-1, 1, 1) \cdot (1, -\alpha, 10) = 0 \Rightarrow -1 - \alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = 9$$