

## Opción A

1.-Dada la función  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) Obtener su dominio y los cortes de su gráfica con los ejes coordenados (explicar)

[0'5 puntos]

b) Hallar las asíntotas horizontales y verticales de su gráfica, justificándola [1 punto]

c) Determinar los intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento y extremos relativos de esta función. Justificar los resultados obtenidos [1 punto]

a)

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 3}{(-2)^2 - 4} = \frac{11}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 3}{2^2 - 4} = \frac{11}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{Puntos de corte con} \Rightarrow \begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 3}{0^2 - 4} = -\frac{3}{4} \\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} \Rightarrow 2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \text{Sin sol.} \end{cases}$$

b)

Asíntotas verticales

$$\text{En } x = -2 \Rightarrow y = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{2 \cdot (-2^-)^2 + 3}{(-2^-)^2 - 4} = \frac{11}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{2 \cdot (-2^+)^2 + 3}{(-2^+)^2 - 4} = \frac{11}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$$\text{En } x = 2 \Rightarrow y = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2 \cdot (2^-)^2 + 3}{(2^-)^2 - 4} = \frac{11}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2 \cdot (2^+)^2 + 3}{(2^+)^2 - 4} = \frac{11}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 3}{x^2}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 + \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

Existe asíntota horizontal,  $y = 2$ , cuando  $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = 2 \Rightarrow \exists \text{ asínt. horizontal, } y = 2, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

**Continuación del Problema 1 de la opción A**

c)

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x(2x^2 + 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3 - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-22x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-22x}{(x^2 - 4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -22 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

|                   | $-\infty$ | $0$ | $\infty$ |
|-------------------|-----------|-----|----------|
| $-22 < 0$         | (-)       | (-) | (-)      |
| $x > 0$           | (-)       | (-) | (+)      |
| $(x^2 - 4)^2 > 0$ | (+)       | (+) | (+)      |
| <b>Solución</b>   | (+)       | (-) | (-)      |

**Crecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$ **Decrecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / x > 0$ 

**Máximo relativo en  $x = 0$**   $f(0) = -\frac{3}{4}$  ya que de crecimiento pasa a decrecimiento

2.- La temperatura **T**, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un cierto proceso de 6 horas de duración, viene dada en función del tiempo **t** transcurrido en ese

proceso por la expresión  $T = 20 + \frac{5t - 15}{t^2 - 6t + 10}$  (con  $0 \leq t \leq 6$ ). Determinar en que momento

del proceso alcanza su temperatura máxima y en que momento alcanza su temperatura mínima. Justificar la respuesta [2'5 puntos]

$$T' = \frac{dT}{dt} = \frac{5 \cdot (t^2 - 6t + 10) - (2t - 6)(5t - 15)}{(t^2 - 6t + 10)^2} = \frac{5t^2 - 30t + 50 - (10t^2 - 30t - 30t + 90)}{(t^2 - 6t + 10)^2}$$

$$T' = \frac{5t^2 - 30t + 50 - 10t^2 + 60t - 90}{(t^2 - 6t + 10)^2} = \frac{-5t^2 + 30t - 40}{(t^2 - 6t + 10)^2} \Rightarrow T' = 0 \Rightarrow -5t^2 + 30t - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$-5(t^2 - 6t + 8) = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T'' = \frac{d^2T}{dt^2} = -5 \cdot \frac{(2t - 6)(t^2 - 6t + 10)^2 - 2(t^2 - 6t + 10)(2t - 6)(t^2 - 6t + 8)}{(t^2 - 6t + 10)^4} =$$

$$T'' = -5 \cdot \frac{(2t - 6)(t^2 - 6t + 10) - 2(2t - 6)(t^2 - 6t + 8)}{(t^2 - 6t + 10)^3} = -5 \cdot (2t - 6) \cdot \frac{(t^2 - 6t + 10) - 2(t^2 - 6t + 8)}{(t^2 - 6t + 10)^3}$$

$$T'' = -10 \cdot (t - 3) \cdot \frac{(t^2 - 6t + 10 - 2t^2 + 12t - 16)}{(t^2 - 6t + 10)^3} = -10 \cdot (t - 3) \cdot \frac{-t^2 + 6t - 6}{(t^2 - 6t + 10)^3} = 10 \cdot (t - 3) \cdot \frac{t^2 - 6t + 6}{(t^2 - 6t + 10)^3}$$

$$\begin{cases} T''(4) = 10 \cdot (4 - 3) \cdot \frac{4^2 - 6 \cdot 4 + 6}{(4^2 - 6 \cdot 4 + 10)^3} = 10 \cdot \frac{16 - 24 + 6}{(16 - 24 + 10)^3} = \frac{-20}{2^3} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ T''(2) = 10 \cdot (2 - 3) \cdot \frac{2^2 - 6 \cdot 2 + 6}{(2^2 - 6 \cdot 2 + 10)^3} = -10 \cdot \frac{4 - 12 + 6}{(4 - 12 + 10)^3} = \frac{20}{2^3} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

**Continuación del Problema 2 de la opción A**

$$\text{Cuando } t = 4 \text{ horas} \Rightarrow T_{\max} = T(4) = 20 + \frac{5 \cdot 4 - 15}{4^2 - 6 \cdot 4 + 10} = 20 + \frac{5}{2} = 22'5^\circ \text{ C}$$

$$\text{Cuando } t = 2 \text{ horas} \Rightarrow T_{\min} = T(2) = 20 + \frac{5 \cdot 2 - 15}{2^2 - 6 \cdot 2 + 10} = 20 + \frac{-5}{2} = 17'5^\circ \text{ C}$$

3.- Resolver la ecuación matricial  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + 2\mathbf{C} = 3\mathbf{B}$ , siendo  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

y  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$  (detallar todos los cálculos realizados) **[2'5 puntos]**

$$\mathbf{AX} + 2\mathbf{C} - 2\mathbf{C} = 3\mathbf{B} - 2\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{AX} = 3\mathbf{B} - 2\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}(3\mathbf{B} - 2\mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}(3\mathbf{B} - 2\mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(3\mathbf{B} - 2\mathbf{C})$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}^t) \Rightarrow \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(-10)} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$3\mathbf{B} - 2\mathbf{C} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -5 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{(-10)} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -5 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-10)} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 14 & -46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{5} & -\frac{16}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix}$$

4.- Estudiar la posición relativa de las rectas  $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{5}$  y  $s : \begin{cases} 4x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$   
(explicar el procedimiento utilizado) [2'5 puntos]

Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\left\{ \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases} \\ 2x - y = -5 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow 2x - (2x + 5) + z = 5 \Rightarrow -5 + z = 5 \Rightarrow z = 10 \Rightarrow s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 5 + 2\mu \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 3\lambda = \mu \\ -3 - 2\lambda = 5 + 2\mu \\ 5\lambda = 10 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda - \mu = -2 \\ 2\lambda + 2\mu = -8 \\ 5\lambda = 10 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - \mu = -2 \Rightarrow \mu = 8 \\ 2 + \mu = -4 \Rightarrow \mu = -6 \end{array} \right. \Rightarrow$$

*Sistema Incompatible  $\Rightarrow$  No son coincidentes ni se cortan en un punto*

$$\text{Veamos si son paralelas} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3, -2, 5) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 0) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{-2}{2}$$

Las rectas **r** y **s** **se cruzan** en el espacio

## Opción B

1.- a) Dada la función  $f(x) = \cos^2(3x)$ , hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto de abscisa  $x = \frac{\pi}{12}$  (explicar) [1 punto]

b) Hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$ . Justificar los resultados obtenidos [1'5 puntos]

a)

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(3x) \cdot [-\sin(3x)] \cdot 3 = -6 \cdot \cos(3x) \cdot \sin(3x) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos^2\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ m_{\text{tag}} = f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -6 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = -6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \Rightarrow \\ m_{\text{norm}} = -\frac{1}{m_{\text{tag}}} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación tan gente} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -3 \cdot \left(x - \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow y = -3x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -3x + \frac{\pi+1}{2} \Rightarrow 6x + 2y + \pi + 1 = 0 \\ \text{Ecuación tan gente} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{3-\pi}{6} \Rightarrow 2x - 6y + 3 - \pi = 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \\ f''(x) = 12x - 6 \\ f'''(x) = 12 \end{array} \right. \Rightarrow$$

Extremos relativos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Posibles extremos relativos} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{array} \right.$$

$$\text{Máximo relativo} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 5 = -2 - 3 + 12 - 5 = 2$$

$$\text{Mínimo relativo} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 5 = 8 - 12 - 24 - 5 = -33$$

Puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Posible punto de inflexión} \Rightarrow f'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Inflexión}$$

$$\text{Punto de inflexión} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 5 = \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - 6 - 5 = -\frac{2}{4} - 6 - 5 = -\frac{13}{2}$$

2.- Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  y el eje **OX**, haciendo un dibujo aproximado y explicando **[2'5 puntos]**

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{De (1)}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2}{2} \\ x = \frac{6-2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$1 \in (0, 2) \Rightarrow f(1) = 1 \cdot (1^2 - 6 \cdot 1 + 8) = 1 \cdot (1 - 6 + 8) = 1 \cdot 3 = 3 > 0$$

$$3 \in (2, 4) \Rightarrow f(3) = 3 \cdot (3^2 - 6 \cdot 3 + 8) = 3 \cdot (9 - 18 + 8) = 3 \cdot (-1) = -3 < 0$$

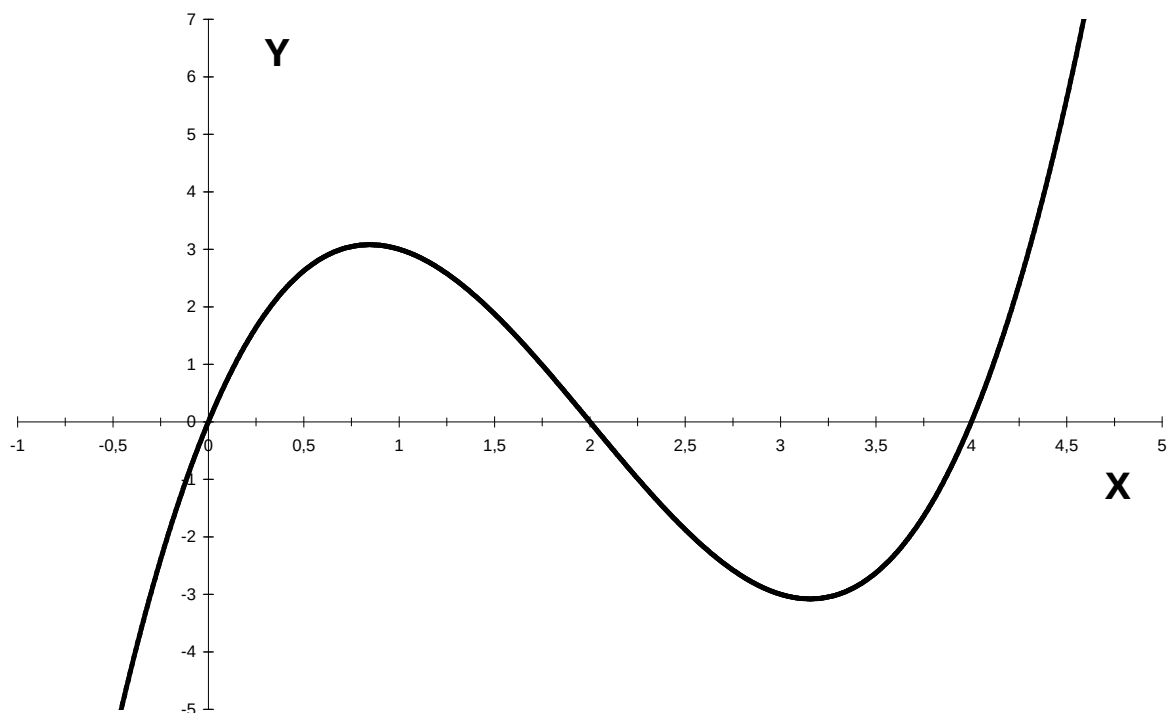
$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx =$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^2 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^2 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_2^4 + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_2^4 - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_2^4$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 0^4) - 2 \cdot (2^3 - 0^3) + 4 \cdot (2^2 - 0^2) - \frac{1}{4} \cdot (4^4 - 2^4) + 2 \cdot (4^3 - 2^3) - 4 \cdot (4^2 - 2^2)$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot (256 - 16) + 2 \cdot (64 - 8) - 4 \cdot (16 - 4) = 4 - 16 + 16 - \frac{240}{4} + 2 \cdot 56 - 4 \cdot 12$$

$$A = 4 - 60 + 112 - 48 = 8 \text{ u}^2$$



3.- Discutir la compatibilidad del sistema siguiente en función de los distintos valores del

parámetro  $m$ : 
$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = m \text{ [2'5 puntos]} \\ 3x - y + mz = 4 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = -4m + 6 + 1 - 6 + 4 - m = -5m + 5 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -5m + 5 = 0 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si  $m = 1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & -4 \\ -6 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es}$$

combinación lineal de las otras dos  $\Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

4.- Dado el plano  $\pi$ : 
$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda - 5\mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ y dado el punto } P(0, 3, -1) \text{ exterior a } \pi,$$

obtener las ecuaciones en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos, de la recta  $r$  que pasa por  $P$  y es perpendicular al plano  $\pi$ , explicando el procedimiento utilizado [2'5 puntos]

Una recta queda determinada por un punto,  $P$ , y un vector director que es el del plano  $\pi$  al ser perpendicular a él.

Para hallar el vector director común, de la recta y el plano, calcularemos el producto vectorial de los vectores que definen al plano

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (3, 1, 2) \\ \vec{v}_2 = (-2, 0, -5) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} + 15\vec{j} = -5\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (-5, 11, 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \text{Ecuac.continua} \Rightarrow \frac{x}{-5} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+1}{2} \\ \text{Ecuac.paramétrica} \Rightarrow \begin{cases} x = -5\alpha \\ y = 3 + 11\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \\ \text{Definida por dos planos} \Rightarrow \begin{cases} 11x + 5y - 15 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$