

OPCIÓN A

1.- Determina una función de la forma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y para la cual el punto $P(1, 2)$ sea un punto de inflexión **[2.5 puntos]**

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 1 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12 \Rightarrow 4 \cdot (-3) + b = -12 \Rightarrow b = 0 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$b = 0 \Rightarrow -3 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

2.- Dada la función $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

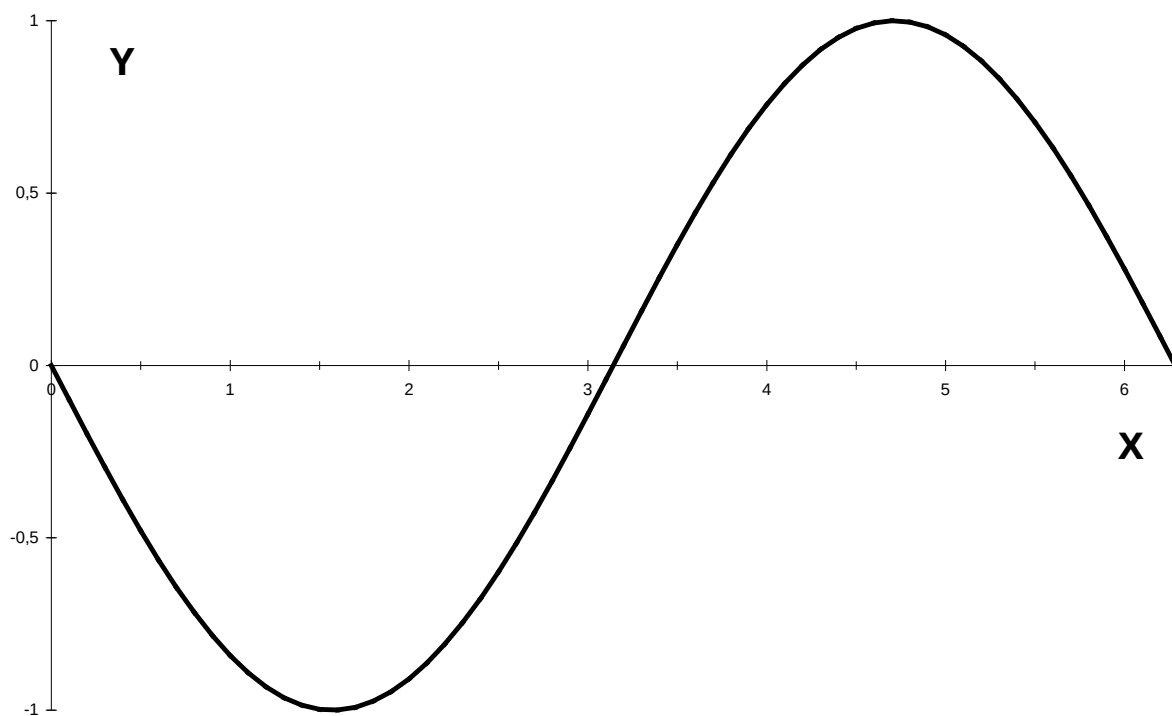
a) Hacer una representación aproximada de la gráfica de la función entre $x = 0$ y $x = 2\pi$

[1.25 puntos]

b) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2\pi$

[1.25 puntos]

a)



b)

$$A = \left| \int_0^{\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx \right| + \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = 2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = 2 \cdot \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$A = 2 \cdot \left[\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right] = 2 \cdot \left[\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = 2 \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

$$A = 2 \cdot [1 - (-1)] = 2 \cdot 2 = 4 \text{ u}^2$$

3.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, se pide

a) Determinar para que valores de k la matriz AB tiene inversa [1 punto]

b) Resolver la ecuación $A \cdot B \cdot X = 3I$ para $k = 0$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1.5 puntos]

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = k+6-2k-4 = -k+2 \Rightarrow \text{Si } |AB| = 0 \Rightarrow -k+2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

Para todo $k \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (AB)^{-1}$

b)

$$(AB)^{-1}(AB)X = 3(AB)^{-1}I \Rightarrow IX = 3(AB)^{-1} \Rightarrow X = 3 \cdot (AB)^{-1} \Rightarrow$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot \text{adj}[(AB)^t] \Rightarrow |AB| = -0+2 = 2 \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = 3 \cdot (AB)^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r : \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 3y - 2z = 0$

a) Comprobar que se cortan en un punto y obtener sus coordenadas **[1.5 puntos]**

b) Determinar el ángulo que forman recta y plano **[1 punto]**

a)

$$\begin{cases} y = 3 - 3x \\ z = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Sustituir los valores de las coordenadas en la ecuación del plano}$$

$$\lambda - 3 \cdot (3 - 3\lambda) - 2 \cdot (2 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda - 9 + 9\lambda - 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow -13 + 14\lambda = 0 \Rightarrow 14\lambda = 13 \Rightarrow \lambda = \frac{13}{14}$$

$$\text{Se cortan en el punto } P \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{13}{14} \\ y = 3 - 3 \cdot \frac{13}{14} = \frac{3}{14} \\ z = 2 - 2 \cdot \frac{13}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \end{array} \right. \Rightarrow P\left(\frac{13}{14}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right)$$

b)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -3, -2) \\ \vec{v}_\pi = (1, -3, -2) \end{cases} \Rightarrow \text{sen}(r, \lambda) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_\pi|} = \frac{|(1, -3, -2) \cdot (1, -3, -2)|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}}$$

$$\text{sen}(r, \lambda) = \frac{|1 + 9 + 4|}{\sqrt{1 + 9 + 4} \cdot \sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = 1 \Rightarrow \text{angulo}(r, \lambda) = \text{arc sen } 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

OPCIÓN B

1.-Dada la función: $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

a) Hallar el punto o los puntos de la gráfica de **f(x)** en los que la pendiente de la recta tangente a la curva sea igual a **1** **[1.5 puntos]**

b) Hallar las asíntotas de la función dada **[1 punto]**

a)

$$f'(x) = \frac{1-x^2 - (-2x)x}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \Rightarrow$$

$$(1-x^2)^2 = 1+x^2 \Rightarrow 1-2x^2+x^4 = 1+x^2 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow (x^2-3)x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$$

b)

Asíntotas verticales

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{1-(-1)^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-1 \\ x=1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1-1^2} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow$$

Asíntota horizontal $\Rightarrow y=0$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{1-(-x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{1-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{0}{0-1} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal } \Rightarrow y=0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

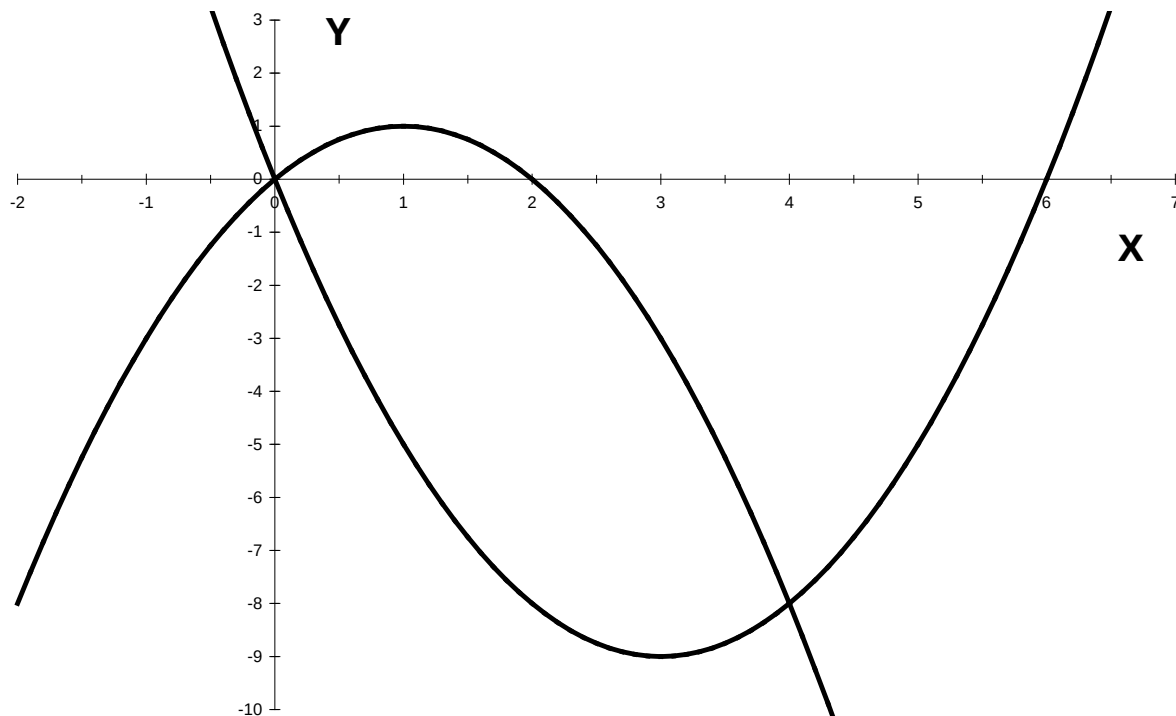
No hay asíntotas oblicuas

2.- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 6x$ y $g(x) = 2x - x^2$

a) Representar el recinto delimitado por sus gráficas, indicando vértices y puntos de corte con los ejes **[1.25 puntos]**

b) Calcular el área de dicho recinto **[1.25 puntos]**

a)



Vértices

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 6x = 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0 \\ x = 4 \Rightarrow f(4) = g(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 = -8 \end{cases}$$

$$\text{Corte con los ejes} \left\{ \begin{array}{l} OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow (x - 6) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases} \\ 2 \cdot x - x^2 = 0 \Rightarrow (2 - x) \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^2 - 6 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot 0 - 0^2 = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

b)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (2x - x^2) dx + \left| \int_0^2 (x^2 - 6 \cdot x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^2 - 6 \cdot x) dx \right| - \left| \int_2^4 (2 \cdot x - x^2) dx \right| \\ A &= \int_0^2 (2x - x^2) dx - \int_0^2 (x^2 - 6 \cdot x) dx - \int_2^4 (x^2 - 6 \cdot x) dx + \int_2^4 (2 \cdot x - x^2) dx = \int_0^4 (2 \cdot x - x^2) dx - \int_0^4 (x^2 - 6 \cdot x) dx \\ A &= \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^4 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^4 = 4 \cdot (4^2 - 0^2) - \frac{2}{3} \cdot (4^3 - 0^3) = 64 - \frac{128}{3} = \frac{54}{3} = 18 u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.- Dado el sistema:
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores de **m** [1.5 puntos]

b) Resolverlo para **m = 10** [1 punto]

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 5 - 10 + 10 - 2 = 0 \Rightarrow \text{Veamos por Gauss}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 10 & -10 & 4 & 2m \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -15 & 9 & 2m-5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-5-15 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$2m - 20 = 0 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow$$

Si $m = 10 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

Si $m \neq 10 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

b)

Si $m = 10 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -5y + 3z = 5 \Rightarrow 5y = 3z - 5 \Rightarrow y = \frac{3}{5}z - 1 \Rightarrow 2x + \frac{3}{5}z - 1 - z = 1 \Rightarrow 2x - \frac{2}{5}z = 2 \Rightarrow$$

$$2x = \frac{2}{5}z + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}z + 1 \Rightarrow \text{Solución} \left(\frac{\lambda}{5} + 1, \frac{3\lambda}{5} - 1, \lambda \right)$$

Ejercicio 4.- Dada las rectas: $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$ y $s : \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - 4t \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = 3t \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas **[1.75 puntos]**

b) Hallar una recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a r y s **[0.75 puntos]**

a) Primero analizaremos si son paralelas para ello veremos si sus vectores directores son iguales o proporcionales, de ser así buscaremos si tienen un punto común que de existir haría que fueran coincidentes, de no ser así ratificamos el paralelismo.

Si no son paralelas o coincidentes buscaremos si tienen un punto común que de existir tendríamos dos rectas que son secantes o se cortan. De no tenerlo son rectas que se cruzan.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, -2) \\ \vec{v}_s = (-4, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow \text{No son coincidentes ni paralelas}$$

Veamos si tienen un punto común

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -1 + 3s \\ z = -2s \end{cases} \\ s : \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - 4t \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = 3t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2s = -\frac{2}{3} - 4t \\ -1 + 3s = \frac{5}{3} + t \\ -2s = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6s + 12t = -5 \\ 9s - 3t = 8 \\ 2s + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 8 \\ 6 & 12 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 18 & -6 & 16 \\ 6 & 12 & -5 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -33 & 16 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -33 & 16 \\ 0 & 33 & -55 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -33 & 16 \\ 0 & 0 & -39 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \text{No hay punto de corte}$$

No son secantes

Son rectas que se cruzan

b)

El vector director de la recta t es perpendicular a los vectores directores de las rectas r y s , lo hallaremos mediante el producto vectorial de esos vectores.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, -2) \\ \vec{v}_s = (-4, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k} + 12\vec{k} + 2\vec{i} - 6\vec{j} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_t = (11, 2, 14) \Rightarrow t = \begin{cases} x = 0 + 11\lambda = 11\lambda \\ y = 0 + 2\lambda = 2\lambda \\ z = 0 + 14\lambda = 14\lambda \end{cases}$$