

Opción A

1..-Representar la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla las siguientes propiedades:

a) Tiene dos asíntotas verticales, $x = -1$ y $x = 3$

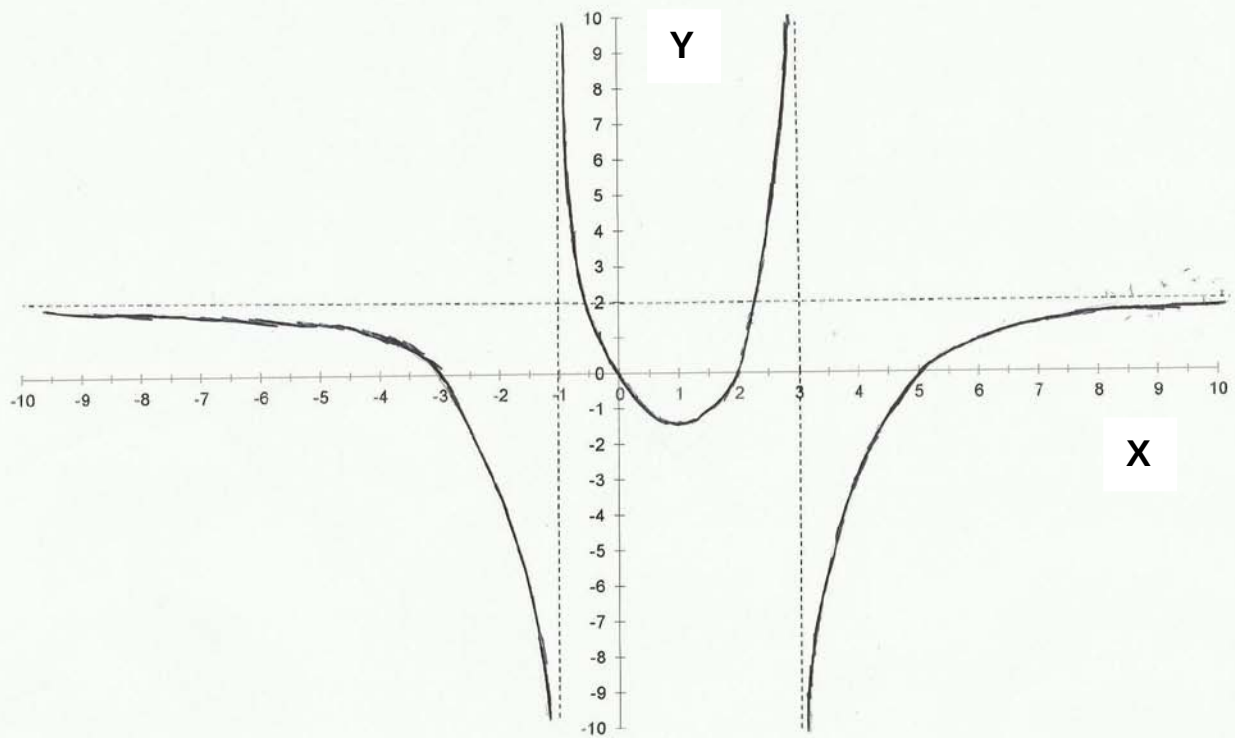
b) Para $x = \pm \infty$, se cumple $f(x) = 2$

c) $f(-3) = f(0) = f(2) = f(5) = 0$

d) Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y es creciente en $(1, 3) \cup (3, +\infty)$

e) $f(1) = -1$

[2'5 puntos]



2.- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 3x$,

a) Representar el recinto limitado por sus gráficas indicando vértice y puntos de corte con los ejes **[1.25 puntos]**

b) Calcular el área de dicho recinto **[1.25 puntos]**

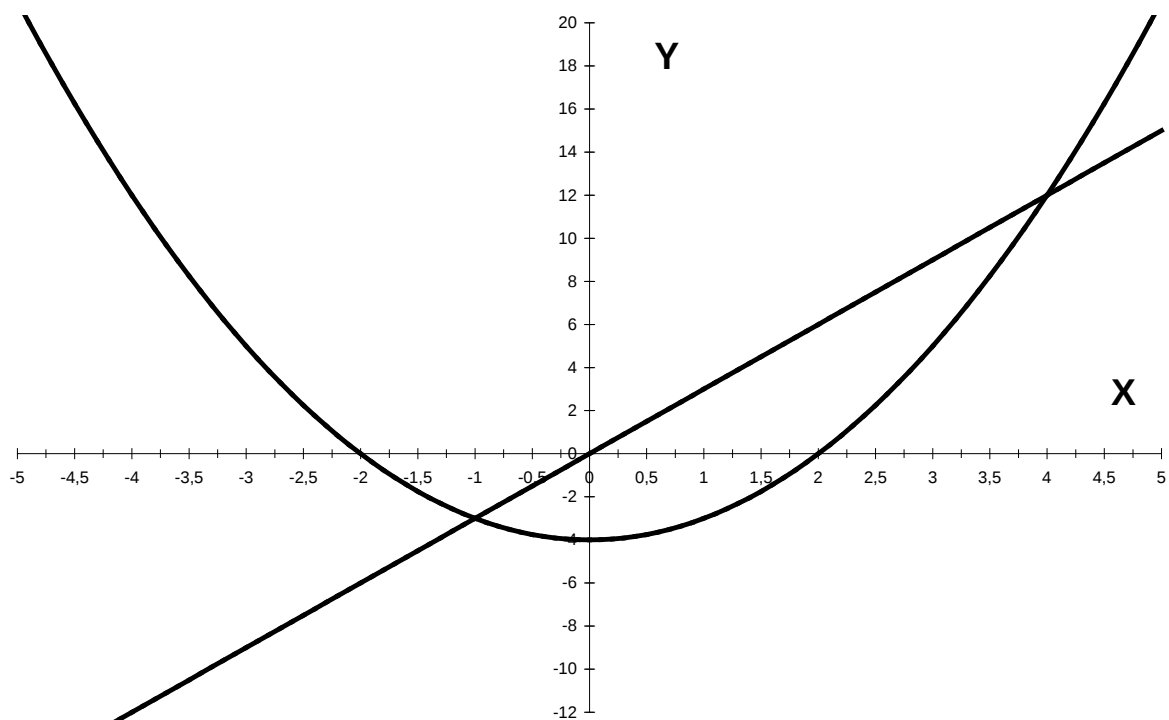
a)

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \\ x = 2 \Rightarrow (2, 0) \end{cases} \\ 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{Vértice de la parábola} \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 4 \Rightarrow (0, -4)$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 3x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 > 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+5}{2} = 4 \\ x = \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$



$$A = \left| \int_{-1}^0 (x^2 - 4) dx \right| - \left| \int_{-1}^0 3x dx \right| + \int_0^2 3x dx + \left| \int_0^2 (x^2 - 4) dx \right| + \int_2^4 3x dx - \int_2^4 (x^2 - 4) dx$$

$$A = -\int_{-1}^0 (x^2 - 4) dx - \int_0^2 (x^2 - 4) dx - \int_2^4 (x^2 - 4) dx + \int_{-1}^0 3x dx + \int_0^2 3x dx + \int_2^4 3x dx$$

$$A = 3 \int_{-1}^0 x dx - \int_{-1}^0 (x^2 - 4) dx = \int_{-1}^0 (3x - x^2 + 4) dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^0 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-1}^0 + 4 \cdot [x]_{-1}^0$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot [4^2 - (-1)^2] - \frac{1}{3} \cdot [4^3 - (-1)^3] + 4 \cdot [4 - (-1)] = \frac{3}{2} \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 65 + 4 \cdot 5 = \frac{135 - 130 + 120}{6} = \frac{125}{6} u^2$$

3.- a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **m**

$$\begin{cases} mx - y + 3z = m \\ 2x + 4z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases} \quad [1.5 \text{ puntos}]$$

b) Resolverlo para **m = 0** [1 punto]

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 4m + 4 = 4m - 6 \Rightarrow \text{Si } A = 0 \Rightarrow 4m - 6 = 0 \Rightarrow 4m = 6 \Rightarrow m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $m = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 3 \\ -6 & 0 & -12 & -3 \\ -6 & 6 & -12 & 12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 36 \end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 39 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$$|A| = 4 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{8 - 3 + 2}{-6} = -\frac{7}{6} \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12 - 3}{-6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1 - 4}{-6} = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{Solución} \left(-\frac{7}{6}, \frac{5}{2}, \frac{5}{6} \right)$$

4.- Obtener la ecuación en forma general del plano que pasa por el punto **(0, 3, 2)** y es paralelo a las dos rectas siguientes:

$$r_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z+1 \quad r_2 : \begin{cases} x-z=5 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

Una forma

$$x+3y=-5 \Rightarrow x=-3y-5 \Rightarrow -3y-5-z=5 \Rightarrow z=-3y-10 \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=-5-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-10-3\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

Los vectores directores son paralelos al plano

$$\begin{cases} \vec{v}_{r_1} = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_{r_2} = (-3, 1, -3) \equiv (3, -1, 3) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (0, 3, 2) = (x, y-3, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6x + 3 \cdot (y-3) + (z-2) - 6 \cdot (z-2) + x + 3 \cdot (y-3) = 0 \Rightarrow 7x + 6 \cdot (y-3) - 5 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 7x + 6y - 5z - 8 = 0$$

Segunda forma

Hallar el vector director del plano que es perpendicular a $\vec{v}_{r_1}$ y a $\vec{v}_{r_2}$

$$\vec{v}_\pi = \vec{v}_{r_1} \times \vec{v}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 6\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_\pi = (7, 6, -5) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_\pi \perp \vec{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow (7, 6, -5) \cdot (x, y-3, z-2) = 0 \Rightarrow 7x + 6 \cdot (y-3) - 5 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 7x + 6y - 5z - 8 = 0 \text{ (comprobada la igualdad)}$$

Opción B

1.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} e^{bx} + a^2x, & \text{si } x < 0 \\ b + \cos ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ determinar los valores de **a** y de **b** para que resulte derivable en toda la recta real **[2.5 puntos]**

Para que sea derivable debe de ser continua en todo el recorrido de la función y el valor de la derivada en el posible punto de discontinuidad el mismo.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^{b \cdot 0} + a^2 \cdot 0 = e^0 + 0 = 1 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b + \cos(a \cdot 0) = b + \cos 0 = b + 1 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow b + 1 = 1 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^0 + a^2x, & \text{si } x < 0 \\ \cos ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} a^2, & \text{si } x < 0 \\ -a \cdot \sin ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -a \cdot \sin(a \cdot 0) = -a \cdot \sin 0 = 0 \Rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2.- Determinar dos números positivos cuya suma sea **24** y tales que el producto de uno por el cubo del otro sea máximo **[2.5 puntos]**

Sean los números **a** y **b**

$$\begin{cases} a + b = 24 \Rightarrow a = 24 - b \\ P = a \cdot b^3 \end{cases} \Rightarrow P = (24 - b) \cdot b^3 = 24b^3 - b^4 \Rightarrow P' = \frac{dP}{db} = 72b^2 - 4b^3 \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow$$

$$72b^2 - 4b^3 = 0 \Rightarrow 4b^2(18 - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 18 - b = 0 \Rightarrow b = 18 \end{cases} \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{db^2} = 144b - 12b^2 = 12b \cdot (12 - b) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P''(0) = 12 \cdot 0 \cdot (12 - 0) = 0 \Rightarrow \text{Ni máximo, ni mínimo} \\ P''(18) = 12 \cdot 18 \cdot (12 - 18) = 216 \cdot (-6) = -1296 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 18 \\ a = 24 - 18 = 6 \end{cases}$$

3.- Resolver la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ explicando las operaciones efectuadas, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A + B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + B) \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 + 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 11 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- Estudiar la posición relativa de los planos $10x - y + 5z = 0$; $4x - 3y - z = 0$; $-3x + 2y - 3z = 2$ [2.5 puntos]

$$\begin{cases} 10x - y + 5z = 0 \\ 4x - 3y - z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -90 - 3 + 40 + 45 + 20 - 12 = 105 - 105 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 0 \\ -40 & -30 & 10 & 0 \\ -30 & 20 & -30 & 20 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -34 & 30 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & 20 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -17 & 15 & 0 \\ 0 & 17 & -15 & 20 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -17 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$$\text{Como } \begin{cases} \frac{10}{4} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow \text{El 1º y el 2º plano no son paralelos} \\ \frac{10}{-3} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{El 1º y el 3º plano no son paralelos} \Rightarrow \\ \frac{4}{-3} \neq \frac{3}{2} \Rightarrow \text{El 2º y el 3º plano no son paralelos} \end{cases}$$

Son planos que se cortan cada dos según rectas paralelas