

Opción A

1.- Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinar los valores de a , b y c para que se cumplan las siguientes condiciones:

i) Que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0, 4)$

ii) Que la recta $y = -4x + 7$ sea tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 4$

[2.5 puntos]

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4 \\ f(4) = -4 \cdot 4 + 7 = -9 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = -9 \Rightarrow 16a + 4b = -13 \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = -13 \\ -16a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow 2b = -5 \Rightarrow \\ f'(4) = -4 \Rightarrow 2a \cdot 4 + b = -4 \Rightarrow 8a + b = -4 \end{cases}$$

$$b = -\frac{5}{2} \Rightarrow 8a - \frac{5}{2} = -4 \Rightarrow 8a = \frac{5}{2} - 4 \Rightarrow 8a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{16} \Rightarrow$$

$$f(x) = -\frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{2}x + 4$$

2.- Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar operarios y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra " y " máquinas y contrata " x " operarios, el número de unidades de producto que se pueden fabricar viene dado por la función $P = 105 \cdot x \cdot y^2$. Cada máquina le supone una inversión de **2000 €** y cada contrato de un operario le cuesta **1600 €**. Si el empresario solo dispone de un presupuesto de **12000 €**. Determina el número de operarios que debe de contratar y el número de máquinas que debe de comprar para maximizar la producción. [2.5 puntos]

$$\begin{cases} 12000 = 2000y + 1600x \Rightarrow 120 = 20y + 16x \Rightarrow 30 = 5y + 4x \Rightarrow 4x = 30 - 5y \Rightarrow x = \frac{30 - 5y}{4} \Rightarrow \\ P = 105 \cdot x \cdot y^2 \end{cases}$$

$$P = 105 \cdot \frac{30 - 5y}{4} \cdot y^2 = \frac{525}{4} \cdot (6y^2 - y^3) \Rightarrow P' = \frac{dP}{dy} = \frac{525}{4} \cdot (12y - 3y^2) = \frac{1575}{4} \cdot (4y - y^2)$$

$$P' = \frac{1575}{4} \cdot y(4 - y) \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow \frac{1575}{4} \cdot y(4 - y) = 0 \Rightarrow y(4 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 - y = 0 \Rightarrow y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'' = \frac{1575}{4} \cdot (4 - 2y) = \frac{3150}{4} \cdot (2 - y) = \frac{1575}{2} \cdot (2 - y) \Rightarrow \begin{cases} P''(0) = \frac{1575}{2} \cdot (2 - 0) = 1575 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ P''(4) = \frac{1575}{2} \cdot (2 - 4) = -1575 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 4 \text{ máquinas} \\ x = \frac{30 - 5 \cdot 4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ contratos} \end{cases}$$

3.- Resolver la ecuación $\mathbf{AX} = \mathbf{B}^t + 2\mathbf{I}$, siendo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[2.5 puntos]

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}^{-1}\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^t - 2\mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^t - 2\mathbf{I}) \\ |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}^t) \Rightarrow \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(\mathbf{A}^t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{X} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.- Dadas las siguientes rectas

$$r : (x, y, z) = (-8, -4, 5) + \lambda(-2, 1, -2) \text{ y } s : \begin{cases} 4y - 3x = 8 \\ 4z - 5x = 60 \end{cases}$$

a) Comprobar que se cortan en un punto y hallar sus coordenadas [1.5 puntos]

b) Hallar la ecuación de la recta paralela a s y que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ [1 punto]

a)

$$\begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x = -8 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} 4y = 8 + 3x \Rightarrow y = \frac{8+3x}{4} = 2 + \frac{3}{4}x \\ 4z = 60 + 5x \Rightarrow z = \frac{60+5x}{4} = 15 + \frac{5}{4}x \end{cases} &\Rightarrow \vec{v}_s = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \equiv (4, 3, 5) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 15 + 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (4, 3, 5) \end{cases} &\Rightarrow \frac{-2}{4} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{No son paralelas ni coincidentes} \end{aligned}$$

Veamos si se cortan

$$\begin{aligned} \begin{cases} -8 - 2\lambda = 4\alpha \\ -4 + \lambda = 2 + 3\alpha \\ 5 - 2\lambda = 15 + 5\alpha \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = -4 \\ \lambda - 3\alpha = 6 \\ 2\lambda + 5\alpha = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = -4 \\ -\lambda + 3\alpha = -6 \end{cases} \Rightarrow 5\alpha = -10 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow \lambda - 4 = -4 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \\ 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) &= -10 \Rightarrow -10 = -10 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Punto de corte de } r \text{ y } s \Rightarrow P \begin{cases} x = -8 - 2 \cdot 0 \\ y = -4 + 0 \\ z = 5 - 2 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow P(-8, -4, 5)$$

Continuación del Problema 4 de la opción A

b)

Llamando t a la recta buscada

$$\vec{v}_t = \vec{v}_s = (4, 3, 5) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = -1 + 5\beta \end{cases}$$

Opción B

1.- Hallar los valores de m para que la función: $f(x) = \begin{cases} m^2 \cdot \operatorname{sen} x, & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-mx} - 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en toda la recta real [2.5 puntos]

Para que sea derivable debe de ser continua en todo el recorrido de la función y el valor de la derivada en el posible punto de discontinuidad el mismo.

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = m^2 \cdot \operatorname{sen} 0 = m^2 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-m \cdot 0} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} m^2 \cdot \cos x, & \text{si } x < 0 \\ -(-m)e^{-mx}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = m^2 \cdot \cos 0 = m^2 \cdot 1 = m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = m \cdot e^{-m \cdot 0} = m \cdot e^0 = m \cdot 1 = m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \Rightarrow m^2 = m \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Puede ser dos funciones} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \begin{cases} 0^2 \cdot \operatorname{sen} x, & \text{si } x < 0 \\ e^{-0 \cdot x} - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ f(x) = \begin{cases} 1^2 \cdot \operatorname{sen} x, & \text{si } x < 0 \\ e^{-1 \cdot x} - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

2.- Calcular : a) $\int_0^2 x \cdot \sqrt{2x^2 + 1} \, dx$ [0.75 puntos] b) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} \, dx$ [1.75 puntos]

a)

$$\int_0^2 x \cdot \sqrt{2x^2 + 1} \, dx = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{2} t \, dt = \frac{1}{2} \int_1^3 t^2 \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot [t^3]_1^3 = \frac{1}{6} \cdot (3^3 - 1^3) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

$$2x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow 4x \, dx = 2t \, dt \Rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} t \, dt \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \text{Si } x = 2 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3 \end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

b)

$$I = \int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} dx = \int dx + \int \frac{2x + 3}{x(x-2)} dx = x - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-2} = x - \frac{3}{2} \cdot \ln x + \frac{7}{2} \int \frac{dt}{t}$$

$$x - 2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} = \frac{2x + 3}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + Bx}{x(x-2)} \Rightarrow A(x-2) + Bx = 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -2A = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-x^2 + 2x}{2x + 3} \quad 1 \quad A = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} + B = 2 \Rightarrow B = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$I = x - \frac{3}{2} \cdot \ln x + \frac{7}{2} \cdot \ln t = x - \frac{3}{2} \cdot \ln x + \frac{7}{2} \cdot \ln (x-2) = x - \ln \sqrt{\frac{(x-2)^7}{x^3}} + K$$

3.- Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y en caso posible resolverlo:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3z = -2 \\ 3x - 4y - 7z = 8 \end{cases} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -18 - 4 + 36 - 14 = 0 \Rightarrow \text{Puede ser Compatible Indeterminado o Incompatible}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -9 & 6 \\ -3 & 4 & 7 & -8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & -7 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Solución

$$-2y + 8z = 7 \Rightarrow -2y = 7 - 8z \Rightarrow y = -\frac{7}{2} + 4z \Rightarrow 3x + 7 - 8z + z = 1 \Rightarrow 3x = -6 + 7z \Rightarrow x = -2 + \frac{7}{3}z$$

$$\text{Solución} \left(-2 + \frac{7}{3}\lambda, -\frac{7}{2} + 4\lambda, \lambda \right)$$

4.- Dada la recta $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = z+1$ y los puntos **A**(1, 1, 0) y **B**(2, 0, -3)

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a la recta **r** y al punto **A** [1.25 puntos]

b) Hallar el ángulo formado por la recta **r** y la recta que pasa por los puntos **A** y **B** [1.25 puntos]

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 1) \\ R(3, 0, -1) \end{cases}$$

a)

El plano π pedido está generado por el vector de la recta **r**, el vector formado por el punto **A**, uno cualquiera de la recta **r** (hemos tomado el punto **R** indicado en la ecuación de la recta) y el vector formado por **A** y el punto genérico **G** del plano pedido, como estos tres vectores son coplanarios el determinante formado por ellos tiene valor nulo y es la ecuación pedida

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 1) \\ \vec{AR} = (3, 0, -1) - (1, 1, 0) = (2, -1, -1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (1, 1, 0) = (x-1, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-3 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) - 2z - 6z + (x-1) + 2 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-1) - 8z = 0 \Rightarrow$$

$$2x - 4y + 8z + 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y + 4z + 1 = 0$$

b)

Primeramente analizaremos si tienen un punto de corte, si no es así no se podrá calcular el ángulo

El coseno del ángulo que forman las rectas **r** y la que forman **A** y **B** es el producto escalar de ellos dos dividido por el producto de los módulos de ambos.

$$\vec{AB} = (2, 0, -3) - (1, 1, 0) = (1, -1, -3) \Rightarrow AB \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 3 - 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow$$

r y $\vec{AB}$ no son paralelos ni coincidentes

Veamos si tienen punto común o de corte

$$\begin{cases} 2 + \alpha = 3 + 2\lambda \\ -\alpha = 3\lambda \\ 3 - 3\alpha = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 - 3\lambda = 3 + 2\lambda \Rightarrow 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = -3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} \Rightarrow 3 - 3 \cdot \frac{3}{5} = -1 - \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$3 - \frac{9}{5} = -\frac{6}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5} = -\frac{6}{5} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{AB}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{|(2, 3, 1) \cdot (1, -1, -3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 9}} = \frac{|2 - 3 - 3|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}}$$

$$\cos \beta = \frac{|-4|}{\sqrt{154}} = \frac{4\sqrt{154}}{154} = \frac{2\sqrt{154}}{77} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{154}}{77}\right) = 71^\circ 11' 46''$$