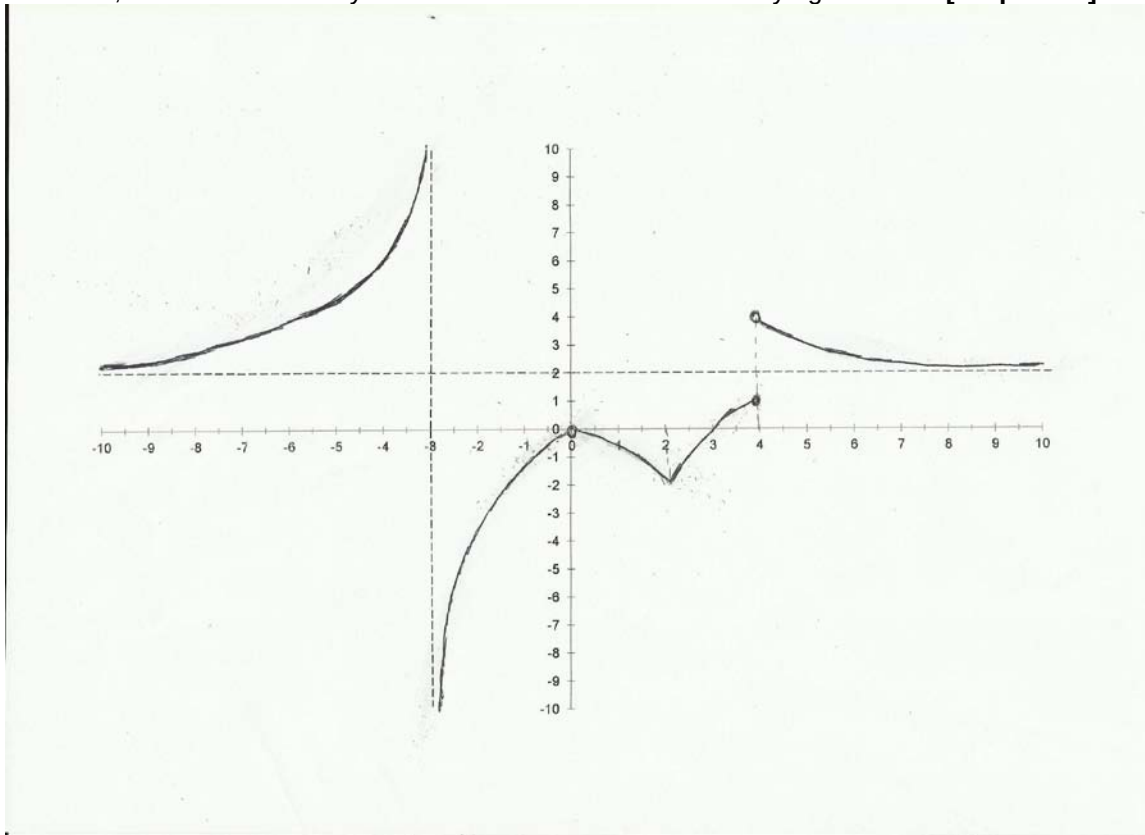


Opción A

1.-Determinar dominio, puntos de corte con los ejes coordenados, puntos de discontinuidad, asíntotas, máximos relativos y mínimos relativos de la función cuya gráfica es: **[2.5 puntos]**



$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 0\}$$

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Puntos de discontinuidad} \begin{cases} \text{Evitable} \Rightarrow x = 4 \\ \text{No evitable} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = -3$$

$$\text{Asíntota horizontal} \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Máximo relativo en } \begin{cases} x = 0^- \\ x = 0^+ \end{cases}$$

$$\text{Mínimo relativo en } x = 2 \Rightarrow \text{No derivable}$$

2.- Se quiere construir una ventana rectangular de 1 metro cuadrado de área. El coste del marco es **12'5 €** por cada metro de altura y de **8 €** por cada metro de anchura. ¿Qué dimensiones debe de tener la ventana para que el marco resulte lo más económico posible?

[2.5 puntos]

Siendo **H** la altura y **A** la anchura

$$\begin{cases} 1 = HA \Rightarrow A = \frac{1}{H} \\ P = 12'5 \cdot 2 \cdot H + 8 \cdot 2 \cdot A = 25 \cdot H + 16 \cdot \frac{1}{H} = \frac{25 \cdot H^2 + 16}{H} \Rightarrow \end{cases}$$

$$P' = \frac{dP}{dH} = \frac{50H^2 - (25 \cdot H^2 - 16)}{H^2} = \frac{25 \cdot H^2 - 16}{H^2} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow \frac{25 \cdot H^2 - 16}{H^2} = 0 \Rightarrow 25 \cdot H^2 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$25 \cdot H^2 = 16 \Rightarrow H^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow H = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \begin{cases} H = \frac{4}{5} \\ H = -\frac{4}{5} \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'' = \frac{50H \cdot H^2 - 2H \cdot (25 \cdot H^2 - 16)}{H^4} = \frac{50H^3 - 50H^3 + 32H}{H^4} = \frac{32}{H^3} \Rightarrow$$

$$P''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{32}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{32 \cdot 125}{64} = \frac{125}{2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo coste} \Rightarrow \begin{cases} H = \frac{4}{5} \text{ m} \\ A = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

3.- Dado el sistema:
$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x - y + mz = 4 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores de **m** **[1.5 puntos]**

b) Resolverlo para **m = 0** **[1 punto]**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = -4m + 6 + 1 - 6 + 4 - m = -5m + 5 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -5m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$

Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & -2 \\ -6 & 2 & -2 & -8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -11 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Continuación del Problema 3 de la opción A

b)

Si $m = 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow 2z = -10 \Rightarrow z = -5$$

$$5y - 5 \cdot (-5) = -3 \Rightarrow 5y = -1 - 25 \Rightarrow y = -\frac{26}{5} \Rightarrow 2x - \frac{26}{5} + 5 = -1 \Rightarrow 2x = \frac{26}{5} - 5 - 1 \Rightarrow 2x = -\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \text{Solución} \left(-\frac{2}{5}, -\frac{26}{5}, -5 \right)$$

4.- Dadas las siguientes rectas

$$r : (x, y, z) = (-8, -4, 5) + \lambda(-2, 1, -2) \text{ y } s : \begin{cases} 4y - 3x = 8 \\ 4z - 5x = 60 \end{cases}$$

a) Comprobar que se cortan en un punto y hallar sus coordenadas **[1.5 puntos]**

b) Hallar la ecuación de la recta paralela a s y que pasa por el punto **(1, 0, -1)** **[1 punto]**

a)

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -8 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} 4y = 8 + 3x \Rightarrow y = \frac{8+3x}{4} = 2 + \frac{3}{4}x \\ 4z = 60 + 5x \Rightarrow z = \frac{60+5x}{4} = 15 + \frac{5}{4}x \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = \left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \equiv (4, 3, 5) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 15 + 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (4, 3, 5) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{4} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{No son paralelas ni coincidentes} \end{cases}$$

Veamos si se cortan

$$\begin{cases} -8 - 2\lambda = 4\alpha \\ -4 + \lambda = 2 + 3\alpha \\ 5 - 2\lambda = 15 + 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = -4 \\ \lambda - 3\alpha = 6 \\ 2\lambda + 5\alpha = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = -4 \\ -\lambda + 3\alpha = -6 \end{cases} \Rightarrow 5\alpha = -10 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow \lambda - 4 = -4 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) = -10 \Rightarrow -10 = -10 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\text{Punto de corte de } r \text{ y } s \Rightarrow P \begin{cases} x = -8 - 2 \cdot 0 \\ y = -4 + 0 \\ z = 5 - 2 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow P(-8, -4, 5)$$

b)

Llamando t a la recta buscada

$$\vec{v}_t = \vec{v}_s = (4, 3, 5) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = -1 + 5\beta \end{cases}$$

Opción B

1.- Determinar una función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $P(-1, 2)$ y tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en $Q(0, -2)$ [2'5 puntos]

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = 2 \Rightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2 \\ f(0) = -2 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -2 \Rightarrow d = -2 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

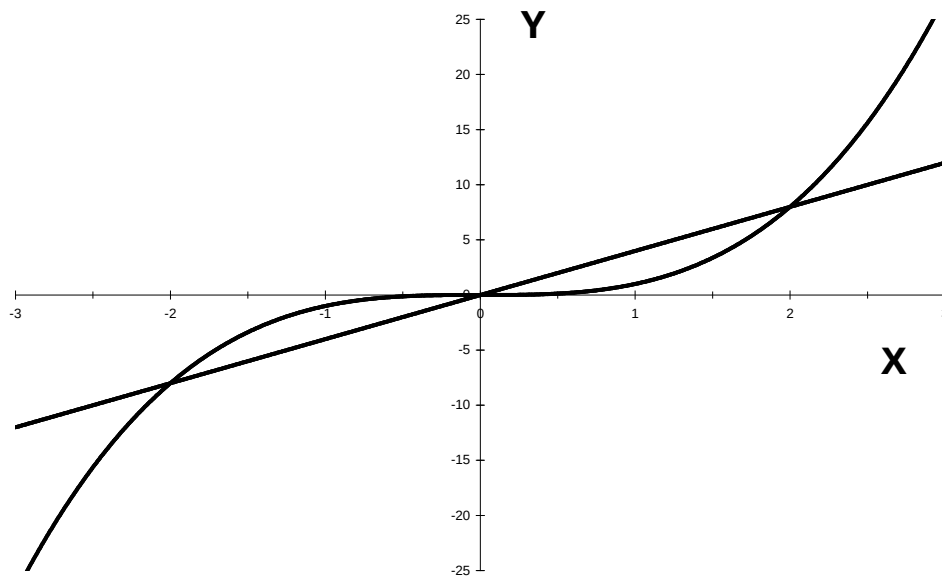
$$-a + 0 + 0 - 2 = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = -4x^3 - 2$$

2.- Dada las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 4x$

a) Representa los recintos delimitados por sus gráficas [1'25 puntos]

b) Calcula el área de los recintos delimitados [1'25 puntos]

a)



b)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 4x \, dx \right| - \left| \int_{-2}^0 x^3 \, dx \right| + \int_0^2 4x \, dx - \int_0^2 x^3 \, dx = -4 \int_{-2}^0 x \, dx + \int_{-2}^0 x^3 \, dx + 4 \int_0^2 x \, dx - \int_0^2 x^3 \, dx$$

$$A = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^0 + \frac{1}{4} \cdot [x^4]_{-2}^0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^2 =$$

$$A = -2 \cdot [0^2 - (-2)^2] + \frac{1}{4} \cdot [0^4 - (-2)^4] + 2 \cdot (2^2 - 0^2) - \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 0^4) = (-2) \cdot (-4) + \frac{1}{4} \cdot (-16) + 2 \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 16$$

$$A = 8 - 4 + 8 - 4 = 8 \, u^2$$

3.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz $N = 2 \cdot A \cdot A^t - 5 \cdot I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1.25 puntos]

b) Resolverlo la siguiente ecuación matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ [1.25 puntos]

a)

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow N = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$N = \begin{pmatrix} 10 & -26 \\ -26 & 68 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -26 & 63 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -5 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Dada los planos: $\pi_1 : x + y - 3z = 1$ y $\pi_2 : 2x - 3y + z = 2$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a ambos planos que pasa por el origen de coordenadas **[1.5 puntos]**

b) Hallar el ángulo que forman π_1 y π_2 **[1 punto]**

a) El vector director del plano buscado π es perpendicular a los dos vectores directores de los planos dados, lo podremos hallar calculando el producto vectorial de estos. Una vez obtenido ese vector este es perpendicular al vector formado por el origen de coordenadas $\mathbf{O}$, que contiene, y el vector genérico $\mathbf{G}$ del plano, siendo su producto escalar nulo y la ecuación buscada

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (1, 1, -3) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (2, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi} = \vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} - 2\vec{k} - 9\vec{i} - \vec{j} = -8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi} = (-8, -7, -5) \equiv (8, 7, 5) \\ \vec{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi} \perp \vec{OG} \Rightarrow \vec{v}_{\pi} \cdot \vec{OG} = 0 \Rightarrow (8, 7, 5) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 8x + 7y + 5z = 0$$

b) El coseno del ángulo α que forman los planos es el mismo que forman sus vectores directores

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (1, 1, -3) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (2, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}|}{|\vec{v}_{\pi_1}| \cdot |\vec{v}_{\pi_2}|} = \frac{|(1, 1, -3) \cdot (2, -3, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 3 - 3|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|-8|}{\sqrt{154}}$$

$$\cos \alpha = \frac{8 \cdot \sqrt{154}}{154} = \frac{4 \cdot \sqrt{154}}{77} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{4 \cdot \sqrt{154}}{77} \right) = 49^{\circ} 51' 36''$$