

BLOQUE 1

1.A.- Obtener razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los

máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ **[2'5 puntos]**

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 2x - 6 = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x+2)(x-1)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3(x+2)(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

	$-\infty$	- 2	1	∞
3 > 0		(+)	(+)	(+)
x > -2		(-)	(+)	(+)
x > 1		(-)	(-)	(+)
Solución		(+)	(-)	(+)

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -2) \cup (x > 1)$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / -2 < x < 1$

Máximo relativo en x = - 2

$\Rightarrow f(-2) = (-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 5 = -8 + \frac{12}{2} + 12 + 5 = 15$ **De crecimiento pasa a decrecimiento**

Mínimo relativo en x = 1 $\Rightarrow f(1) = 1^3 + \frac{3}{2}1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 + \frac{3}{2} - 6 + 5 = \frac{3}{2}$

De decrecimiento pasa a crecimiento

1.B- Hallar el valor que ha de tener **m** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 6 - m(x+2)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3 + \frac{2}{m(x+2)} & \text{si } x > -1 \end{cases} \text{ sea derivable en } x = -1 \text{ [2'5 puntos]}$$

Primeramente tiene que ser continua

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 6 - m(-1+2)^2 = 6 - m \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3 + \frac{2}{m(-1+2)} = 3 + \frac{2}{m} = \frac{3m+2}{m} \end{cases} \Rightarrow 6 - m = \frac{3m+2}{m} \Rightarrow 6m - m^2 = 3m + 2 \Rightarrow$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3+1}{2} = 2 \\ m = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2m(x+2) & \text{si } x < -1 \\ -\frac{2}{m(x+2)^2} & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -2m(-1+2) = -2m \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\frac{2}{m(-1+2)^2} = -\frac{2}{m} \end{cases} \Rightarrow -2m = -\frac{2}{m} \Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow$$

$$m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua y derivable la solución es } m = 1$$

BLOQUE 2

2.A.- Se desea vallar una parcela rectangular aprovechando una pared recta como uno de los lados de la misma. Si se dispone de una valla de **120 metros** de longitud para marcar los otros tres lados, determinar las dimensiones de la parcela para que su área sea máxima. **[2'5 puntos]**

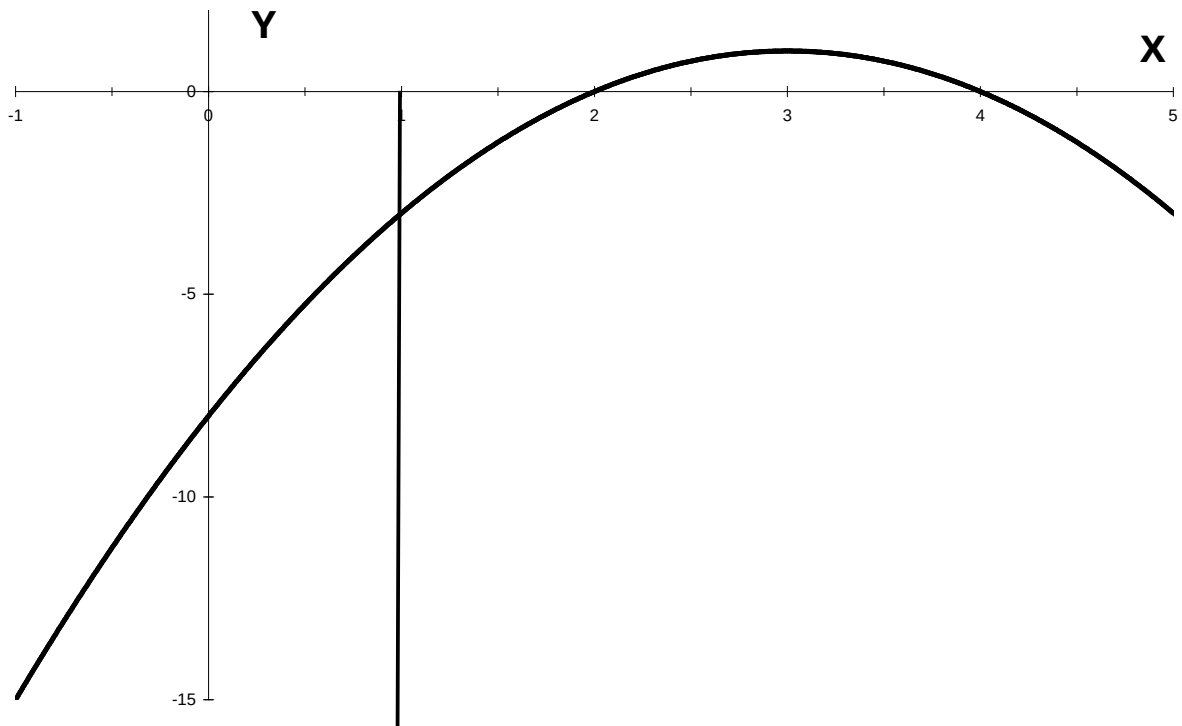
Siendo **L** la longitud paralela a la pared y **A** el ancho de ella

$$\begin{cases} L + 2A = 120 \rightarrow L = 120 - 2A \\ S = LA \end{cases} \Rightarrow S = (120 - 2A)A \Rightarrow S' = \frac{dS}{dA} = -2A + (120 - 2A) = 120 - 4A$$

$$\text{Si } S' = 0 \Rightarrow 120 - 4A = 0 \Rightarrow 4A = 120 \Rightarrow A = \frac{120}{4} = 30 \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{dA^2} = -4 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 30 \text{ m.} \\ L = 120 - 2 \cdot 30 = 120 - 60 = 60 \text{ m} \end{cases}$$

2.B.- Representar las regiones limitadas por las curvas $y = -x^2 + 6x - 8$, la recta $x = 1$ y el eje OX , calculando el área total de dichas regiones [2'5 puntos]



$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2}{2} = 4 \\ x = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_1^2 (-x^2 + 6x - 8) dx \right| + \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) dx = \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx - \frac{1}{3} [x^3]_2^4 + 6 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_2^4 - 8 \cdot [x]_2^4$$

$$A = \frac{1}{3} [x^3]_1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_1^2 + 8 \cdot [x]_1^2 - \frac{1}{3} (4^3 - 2^3) + 3 \cdot (4^2 - 2^2) - 8 \cdot (4 - 2)$$

$$A = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) - 3 \cdot (2^2 - 1^2) + 8 \cdot (2 - 1) - \frac{1}{3} (64 - 8) + 3 \cdot (16 - 4) - 8 \cdot 2$$

$$A = \frac{1}{3} (8 - 1) - 3 \cdot (4 - 1) + 8 \cdot 1 - \frac{56}{3} + 36 - 16 = \frac{7}{3} - 3 \cdot 3 + 8 - \frac{56}{3} + 20 = 28 - 9 - \frac{49}{3} = 19 - \frac{49}{3}$$

$$A = \frac{57 - 49}{3} = \frac{8}{3} u^2$$

BLOQUE 3

3.A- Dada el sistema
$$\begin{cases} 2x - 3y + az = 1 \\ x + z = 0 \\ 3x + y - 3z = a \end{cases}$$
, hallar el valor del parámetro a para que sea incompatible. ¿Por qué lo es? **[2'5 puntos]**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + a - 2 - 9 = a - 20 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a - 20 = 0 \Rightarrow a = 20$$

Si $a = 20$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 20 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & -3 & | & 20 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 & 20 & | & 1 \\ -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ -6 & -2 & 6 & | & -40 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 & 20 & | & 1 \\ 0 & -3 & 18 & | & 1 \\ 0 & -11 & 66 & | & -37 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 & 20 & | & 1 \\ 0 & -3 & 18 & | & 1 \\ 0 & 33 & -198 & | & 111 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 & 20 & | & 1 \\ 0 & -3 & 18 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 122 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 122 \Rightarrow z = \frac{122}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

3.B- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$,

calcular el determinante de $B \cdot C - 2A^t$ **[2'5 puntos]**

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A^t = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 2 \\ 6 & -10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = B \cdot C - 2A^t = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -14 & 2 \\ 6 & -10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 24 - 12 - 6 - 16 + 24 = 56 - 34 = 22$$

BLOQUE 4

4.A.- Dado el punto $P(5, 0, -1)$ exterior a la recta $r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -4 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$, hallar el plano

que contenga a r y pase por P [2'5 puntos]

Para hallar la ecuación del plano π utilizaremos el vector director de la recta r , el vector determinado por un punto R cualquiera de esa recta (tomaremos el que se indica en la ecuación para $\lambda = 0$) y, como tercero el vector que une al punto dado P con el punto G generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y el vector PG es combinación lineal de los otros dos por ello el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación del plano buscado.

$$R(0, -4, 2) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, -4, 2) - (5, 0, -1) = (-5, -4, 3) \equiv (5, 4, -3) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (5, 0, -1) = (x-5, y, z+1) \end{cases}$$

$$5y - 4(z+1) - 4(x-5) - 3y = 0 \Rightarrow -4(x-5) + 2y - 4(z+1) = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 4z - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y + 2z - 8 = 0$$

4.B.- Estudiar la posición relativa de los planos: $\pi_1 : 2x - 3y + z = 2$, $\pi_2 : 3x - 2y - z = 7$ y $\pi_3 : x + y - 2z = 5$. En caso de que se corten en un punto, hallar éste. Y en caso de que se corten en una recta, determinarla [2'5 puntos]

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 3 + 2 + 2 - 18 = 0 \Rightarrow \text{No hay punto de corte}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 2 & -14 \\ -2 & -2 & 4 & -10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ Se cortan según una recta $r \Rightarrow$

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 5y - 5z = 8 \end{cases} \Rightarrow 5y = 8 + 5z \Rightarrow y = \frac{8}{5} + z \Rightarrow 2x - 3\left(\frac{8}{5} + z\right) + z = 2 \Rightarrow 2x - \frac{24}{5} - 3z + z = 2 \Rightarrow$$

$$2x = 2 + \frac{24}{5} + 2z \Rightarrow 2x = \frac{34}{5} + 2z \Rightarrow x = \frac{17}{5} + z \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{17}{5} + \lambda \\ y = \frac{8}{5} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$