BLOQUE 1

1.A.- Obtener los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 15$ donde la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos **(0 , -12)** y **(1 , 12) [2'5 puntos]**

$$m = \frac{12-(-12)}{1-0} = \frac{24}{1} = 24$$

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow m = 24 \Rightarrow 24 = 3x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = 36 > 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+6}{2} = 4 \\ x = \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

1.B- Obtener dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{x^2+8}{x^2-4}$ **[2'5 puntos]**

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2^2+8}{2^2-4} = \frac{12}{0} \Rightarrow Sin\ solución \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{(-2)^2+8}{(-2)^2-4} = \frac{12}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \Rightarrow$$

$$Dom(f) = \forall x \in \Re - \{-2\ , 2\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+8)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 16x}{(x^2-4)^2} = \frac{-24x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -24 < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ (x^2-4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

-24 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(+)**	**(-)**
$(x^2 - 4)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re \,/\, x > 0$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re \,/\, x < 0$

Mínimo relativo en x = 0 $f(0) = \frac{0^2+8}{0^2-4} = \frac{8}{-4} = -2$ De decrecimiento pasa a crecimiento

BLOQUE 2

2.A.- Calcular el área del recinto limitado por la curva **y = 4 – x²**, la recta **8x + 2y = 16** y la recta **y = 4x + 8 [2’5 puntos]**

$$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ 8x+2\cdot 0=16 \Rightarrow x=\dfrac{16}{2}=8 \\ 4x+8=0 \Rightarrow 4x=-8 \Rightarrow x=-\dfrac{8}{4}=-2 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2=8-4x \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{4}{2} \Rightarrow x=2 \\ 4-x^2=8+4x \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4}{2} \Rightarrow x=-2 \\ 4x+8=8-4x \Rightarrow 8x=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y(-1)=4-(-1)^2=3 \Rightarrow Positivo \\ y(-1)=8+4(-1)=4 \Rightarrow Positivo \end{cases} \Rightarrow 4x+8>4-x^2 \\ \begin{cases} y(1)=4-1^2=3 \Rightarrow Positivo \\ y(1)=8-4\cdot 1=4 \Rightarrow Positivo \end{cases} \Rightarrow 8-4x>4-x^2 \end{cases}$$

$$A=\int_{-2}^{0}(4x+8)\,dx-\int_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)dx+\int_{0}^{2}(8-4x)\,dx-\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\int_{-2}^{0}(4x+8)\,dx+\int_{0}^{2}(8-4x)\,dx-\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx$$

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{0}+8\cdot[x]_{-2}^{0}+8\cdot[x]_{0}^{2}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{0}^{2}-4\cdot[x]_{-2}^{2}+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$A=2\cdot\left[0^2-(-2)^2\right]+8\cdot[0-(-2)]+8\cdot(2-0)-2\cdot\left(2^2-0^2\right)-4\cdot[2-(-2)]+\frac{1}{3}\cdot\left[2^3-(-2)^3\right]$$

$$A=2\cdot(-4)+8\cdot 2+8\cdot 2-2\cdot 4-4\,(2+2)+\frac{1}{3}\cdot(8+8)=-8+16+16-8-16+\frac{16}{3}=\frac{16}{3}\ u^2$$

2.B.- Calcular las siguientes integrales

$$i)\int \frac{dx}{x^2-1} \quad (1'25\ puntos) \quad y \quad ii)\int x^2\cdot e^{3x}dx \quad (1'25\ puntos)$$

i) Método de integración de funciones racionales

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow A(x+1)+B(x-1)=1\Rightarrow$$

$$Si\Rightarrow\begin{cases} x=-1\Rightarrow A(-1+1)+B(-1-1)=1\Rightarrow -2B=1\Rightarrow B=-\frac{1}{2} \\ x=1\Rightarrow A(1+1)+B(1-1)=1\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}(\ln t-\ln u)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{u}$$

$$Cambios\ de\ variable\Rightarrow\begin{cases} x-1=t\Rightarrow dx=dt \\ x-1=u\Rightarrow dx=du\end{cases}$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+K$$

ii) Método de Integración por partes

$$I=\int x^2\cdot e^{3x}dx=x^2\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}\,2x\,dx=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\int x\cdot e^{3x}\,dx=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}\,dx\right)$$

$$\begin{cases} x^2=u\Rightarrow 2x\,dx=du \\ e^{3x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{3x}dx=\int e^t\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int e^t dt=\frac{e^t}{3}=\frac{e^{3x}}{3}\end{cases} \qquad \begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{3x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{3}\end{cases}$$

$$3x=t\Rightarrow 3\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$$

$$I=\int x^2\cdot e^{3x}dx=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{9}x\cdot e^{3x}+\frac{2}{9}\int e^{3x}\,dx=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{9}x\cdot e^{3x}+\frac{2}{9}\frac{e^{3x}}{3}=\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{e^{3x}}{3}+K$$

BLOQUE 3

3.A- Dada las matrices $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

i) Hallar las matrices **A** y **B** que verifican el sistema: $\begin{cases} 2A+B=M \\ A-3B=N \end{cases}$ **[1'25 puntos]**

ii) Calcular $\mathbf{M^{-1}N^{t}}$ **[1'25 puntos]**

i)

$$\begin{cases} 6A+3B=3M \\ A-3B=N \end{cases} \Rightarrow 7A=3M+N \Rightarrow A=\frac{1}{7}(3M+N) \Rightarrow A=\frac{1}{7}\left[3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$A=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2A+B=M \\ -2A+6B=(-2)N \end{cases} \Rightarrow 7B=M-2N \Rightarrow B=\frac{1}{7}(M-2N) \Rightarrow A=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$A=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

ii) La condición necesaria para que exista una matriz inversa es que su determinante no sea nulo

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\left(adj\ M^{t}\right) \Rightarrow M^{t}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ M^{t}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ N^{t}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow M^{-1}N^{t}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3.B.- Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **k** $\begin{cases} x + ky + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ kx + y + z = 4 \end{cases}$

[2'5 puntos]

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + k^2 + 1 - 3k - 1 - k = k^2 - 4k + 3 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4+2}{2} = 3 \\ k = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re - \{1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow Infinitas\ soluciones$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ a = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

$Sistema\ Incompatible$

BLOQUE 4

4.A.- Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} y=1+x \\ z=2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-2 \\ z=\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\Re)$ **[2'5 puntos]**

Para hallar la ecuación del plano π utilizaremos el vector director de la recta r, el vector director de la recta s y el vector que forman uno cualquiera de los puntos **R** de la recta **r**, que es la contenida (tomaremos el punto indicado en la ecuación) con el vector G, generador del plano pedido. Estos tres vectores son coplanarios, siendo el vector RG combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación del plano que se busca.

$$r:\begin{cases} x=\mu \\ y=1+\mu \\ z=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,0) \\ R(0,1,2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(-2,0,1) \\ \overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(0,1,2)=(x,y-1,z-2) \end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$x+2(z-2)-(y-1)\Rightarrow\pi\equiv x-y+2z-3=0$$

4.B.- Dado el plano: $\pi:3x-2y+z=5$ y la recta $r:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+3$, hallar su posición relativa. Si se cortan en un punto, hallar sus coordenadas. Y si son paralelos, hallar el plano que contenga a **r** y sea paralelo a π **[2'5 puntos]**

$$r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases}\Rightarrow 3\cdot2\lambda-2(1-2\lambda)+(-3+\lambda)=5\Rightarrow6\lambda-2+4\lambda-3+\lambda=5\Rightarrow11\lambda=10\Rightarrow\lambda=\frac{10}{11}\Rightarrow$$

$$Siendo\ P\ el\ punto\ de\ corte\Rightarrow P\begin{cases} x=2\cdot\frac{10}{11}=\frac{20}{11} \\ y=1-2\cdot\frac{10}{11}=1-\frac{20}{11}=-\frac{9}{11} \\ z=-3+\frac{10}{11}=-\frac{23}{11} \end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{20}{11},-\frac{9}{11},-\frac{23}{11}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8+3+3+2+2-18 = 0 \Rightarrow No\ hay\ \ punto\ de\ corte$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 2 & -14 \\ -2 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow Se\ cortan\ según\ una\ recta\ r \Rightarrow$

$$r : \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 5y-5z=8 \end{cases} \Rightarrow 5y = 8+5z \Rightarrow y = \frac{8}{5}+z \Rightarrow 2x-3\left(\frac{8}{5}+z\right)+z=2 \Rightarrow 2x-\frac{24}{5}-3z+z=2 \Rightarrow$$

$$2x = 2+\frac{24}{5}+2z \Rightarrow 2x = \frac{34}{5}+2z \Rightarrow x = \frac{17}{5}+z \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{17}{5}+\lambda \\ y = \frac{8}{5}+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$