

DISTRITO UNIVERSITARIO DE CANARIAS
Soluciones Septiembre 2008
MATEMÁTICAS II.

BLOQUE 1

1.A.- Dada la función $f(x) = 1 - x^2 e^{-x^2}$, se pide:

i) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos **[1'5 puntos]**

ii) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal **[1 punto]**

i)

$$f'(x) = -[2xe^{-x^2} + (-2x)x^2e^{-x^2}] = -2xe^{-x^2}(1 - x^2) = -2x(1 - x)(1 + x)e^{-x^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$-2x(1 - x)(1 + x)e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ 1 - x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1 \\ 1 + x > 0 \Rightarrow x > -1 \\ e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	0	1	∞
-2 < 0		(-)	(-)	(-)	(-)
x > 0		(-)	(-)	(+)	(+)
x < 1		(+)	(+)	(+)	(-)
x > -1		(-)	(+)	(+)	(+)
$e^{-x^2} > 0$		(+)	(+)	(+)	(+)
Solución		(-)	(+)	(-)	(+)

Mínimo relativo en $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 - (-1)^2 e^{-(-1)^2} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

Máximo relativo en $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 - 0^2 \cdot e^{-0^2} = 1 - 0 \cdot 1 = 1$ (De crecimiento pasa a decrecimiento)

Mínimo relativo en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 1^2 \cdot e^{-1^2} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

ii)

$$\begin{aligned}
 y &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^2 e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{2xe^{x^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(e^{x^2} - 1)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

Existe asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2 e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - (-x)^2 e^{-(-x)^2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - x^2 e^{-x^2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2} - x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x(e^{x^2} - 1)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

Existe asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$

1.B- Hallar los valores de a, b y c de forma que la función **f(x)** sea continua en el intervalo

$$[2, -3], \text{ derivable en } (2, -3) \text{ y tal que } f(-2) = f(3) \quad f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ c + \sqrt{x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

[2'5 puntos]

Continuidad

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a \cdot 0 + b \cdot 0^2 = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = c + \sqrt{0+1} = c+1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = c+1 \Rightarrow c+1=0 \Rightarrow c=-1$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & \text{si } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{si } 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = a + 2b \cdot 0 = a \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) + b \cdot (-2)^2 = -1 - 2b \\ f(3) = -1 + \sqrt{3+1} = -1 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow -1 - 2b = 1 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{-2} = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -1 + \sqrt{x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

BLOQUE 2

2.A.- Determina el valor de **a** siendo **a > 0** para que el área limitada por la curva **y = x²** y la recta **y = ax** sea igual a $\frac{9}{2}$ **[2'5 puntos]**

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 0 = ax \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 = ax \Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow (x-a)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-a=0 \Rightarrow x=a \\ x=0 \end{cases}$$

$$\frac{9}{2} = \int_0^a ax \, dx - \int_0^a x^2 \, dx \Rightarrow \frac{9}{2} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^a - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^a \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{a}{2} \cdot (a^2 - 0^2) - \frac{1}{3} \cdot (a^3 - 0^3) \Rightarrow$$

$$\frac{9}{2} = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{3a^3 - 2a^3}{6} \Rightarrow 9 = \frac{a^3}{3} \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$$

2.B.- Calcular las siguientes integrales

$$i) \int (2x-1) \ln(x) dx \quad (1'25 \text{ puntos}) \quad y \quad ii) \int \frac{1-x}{1+4x^2} dx \quad (1'25 \text{ puntos})$$

i) Método de Integración por partes

$$I = \int (2x-1) \ln(x) dx = (x^2 - x) \ln(x) - \int (x^2 - x) \frac{dx}{x} = (x^2 - x) \ln(x) - \int (x-1) dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ (2x-1) dx = dv \Rightarrow v = \int (2x-1) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - x = x^2 - x \end{array} \right.$$

$$I = (x^2 - x) \ln(x) - \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) = (x^2 - x) \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 + x + K$$

ii)

$$I = \int \frac{1-x}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+4x^2} dx - \int \frac{x}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx - \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \int \frac{\frac{du}{2}}{1+u^2} - \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t}$$

$$1+4x^2 = t \Rightarrow 8x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{8} \quad 2x = u \Rightarrow 2 dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{8} \ln t = \frac{1}{2} \cdot \arctan u - \frac{1}{8} \ln(1+4x^2) = \frac{1}{2} \cdot \arctan(2x) - \frac{1}{8} \ln(1+4x^2) + K$$

BLOQUE 3**3.A-** Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la identidad de orden 2, I *i)* ¿Para que valores de $m \in \mathbb{R}$ la matriz $A - mI$ no tiene inversa? [1'25 puntos]*ii)* Describir las matrices X de orden 2×2 que cumplen : $(A - 3I)X = 0$ [1'25 puntos]*i)* Para que no halla inversa el determinante de la matriz es nulo

$$A - mI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix} \Rightarrow |A - mI| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2-m)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4 - 2m + m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow$$

*No hay solución real $\Rightarrow$ No hay ningún valor de $m \in \mathbb{R}$ que cumpla la pregunta i)**ii)*

$$(A - 3I)X = 0 \Rightarrow A - 3I = \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=0 \Rightarrow a=c \\ -b+d=0 \Rightarrow b=d \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$$

3.B.- Se sabe que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3$, calcula:

i) $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 15c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix}$ **[0'75 puntos]** ii) $\begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)A \end{vmatrix}$ **[0'75 puntos]** iii) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **[1 punto]**

i)

$$\begin{vmatrix} 3a_1 & 3b_1 & 15c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 5c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 15 \cdot (-3) = -45$$

ii)

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)A \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot |A| = -\frac{1}{27} \cdot (-3) = \frac{1}{9}$$

iii)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3 - 0 \text{ (tienen dos filas iguales)} = -3$$

BLOQUE 4

4.A.- Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano

$$\pi \equiv x + y - z + 6 = 0 \text{ con la recta } r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ -x + 3z + 3 = 0 \end{cases} \text{ y es paralela a la recta } s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = z \text{ [2'5 puntos]}$$

puntos]

Hallaremos el punto **P** de corte verificando los puntos de **r** en el plano dado. Obtenido el punto hallaremos la recta **t** que tiene como vector director el de la recta **s**

$$r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ -x + 3z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 6 + 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3y = 9 + 3z \Rightarrow y = 3 + z \Rightarrow x - 3(3 + z) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x - 9 - 3z + 6 = 0 \Rightarrow x - 3 - 3z = 0 \Rightarrow x = 3 + 3z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

Punto de intersección P de la recta r con el plano π

$$3 + 3\lambda + 3 + \lambda - \lambda + 6 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow P \begin{cases} x = 3 + 3 \cdot (-4) = 3 - 12 = -9 \\ y = 3 + (-4) = -1 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow P(-9, -1, -4)$$

Recta t

$$\vec{v}_t = \vec{v}_s = (3, -1, 1) \Rightarrow t = \frac{x+9}{3} = \frac{y+1}{-1} = z+4$$

4.B.- Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto **P(-1, 0, 2)** y contiene a la recta

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = z+2 \text{ [2'5 puntos]}$$

Para determinar el plano π contamos con el vector director de la recta **s**, con el vector formado por el punto **P** y un punto **S** cualquiera de la recta **s** (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el vector que forma el punto **P** y el punto **G**, genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (están contenidos en el mismo plano) y por ello el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, así que el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida.

$$S(0, 1, -2)$$

$$\begin{cases} \vec{v}_s = (2, -3, 1) \\ \vec{PS} = (0, 1, -2) - (-1, 0, 2) = (1, 1, -4) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (-1, 0, 2) = (x+1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$12(x+1) + y + (z-1) + 2(z-2) + 3(z-2) - (x+1) + 8y = 0 \Rightarrow 11(x+1) + 9y + 5(z-2) = 0$$

$$\pi \equiv 11x + 9y + 5z + 1 = 0$$