

OPCIÓN A

1.- Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga su extremo relativo en **(1, 1)** y un punto de inflexión **(0, 3)** ¿Es **(1, 1)** el único extremo de la función?. Determinar los máximos y los mínimos relativos de **f** [2'5 puntos]

$$\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1 \\ f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \Rightarrow d = 3 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + 0 + c + 3 = 1 \\ 3a + 2 \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ -3a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 1 + c = -2 \Rightarrow c = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } x = -1 & f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } x = 1 & f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1 \end{cases}$$

2.- Hallar el área de la región acotada comprendida entre las gráficas de las funciones

$$y = \frac{1}{x^2 + 4}, \quad y = \frac{x}{16} \text{ y el eje OY [2'5 puntos]}$$

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{x^2 + 4} \Rightarrow 0 \neq 1 \Rightarrow \text{No tiene puntos de corte} \\ 0 = \frac{x}{16} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{x}{16} \Rightarrow x(x^2 + 4) = 16 \Rightarrow x^3 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow \text{por Ruffini}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 4 & -16 \\ 2 & 2 & 4 & 16 & \end{array} \quad (x-2)(x^2 + 2x + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = -30 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 & \end{array}$$

$$f(1) \Rightarrow \begin{cases} y(1) = \frac{1}{1^2 + 4} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{16} \Rightarrow \\ y = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$A = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx - \frac{1}{16} \int_0^2 x dx = \int_0^2 \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)} dx - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx - \frac{1}{32} \cdot (2^2 - 0^2)$$

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2 dt \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{4} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} dx - \frac{1}{32} \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot [\arctan t]_0^1 - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot (\arctan 1 - \arctan 0) - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} = \frac{\pi - 1}{8} u^2$$

3.- Conociendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

[2'5 puntos]

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1$$

4.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2 = 0$

a) Determinar su posición relativa [1 punto]

b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte [1'5 puntos]

a) Una recta y un plano o se cortan en un punto **P** o son paralelos, en este último caso los vectores directores de ambos son perpendiculares y su producto escalar es nulo, de serlo habría que estudiar si tienen un punto común porque de tenerlo la recta estaría contenida en el plano; de no serlo se cortarían en un punto **P** que hallaremos verificando los puntos de la recta en la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = z + 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v}_\pi = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

No son paralelos, se cortan en un punto **P**

b)

$$-1 + 1 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow P \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + 2 = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 2, 3)$$

Como el vector director del plano es perpendicular a él se halla el seno del ángulo que forman plano y recta que es igual al cociente entre el producto escalar de los vectores directores del plano y de la recta y el producto de los módulos de ambos

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{v}_\pi = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_\pi|} = \frac{|1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

OPCIÓN B

1.-Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$

[1'5 puntos]

b) Calcula el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado a) y el eje **OY** [1 punto]

a)

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 9 - 6 + 2 = 5 \\ m = f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow y - 5 = 4 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 4x - 7$$

$$4x - y - 7 = 0$$

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución} \\ 0 = 4x - 7 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 4x - 7 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

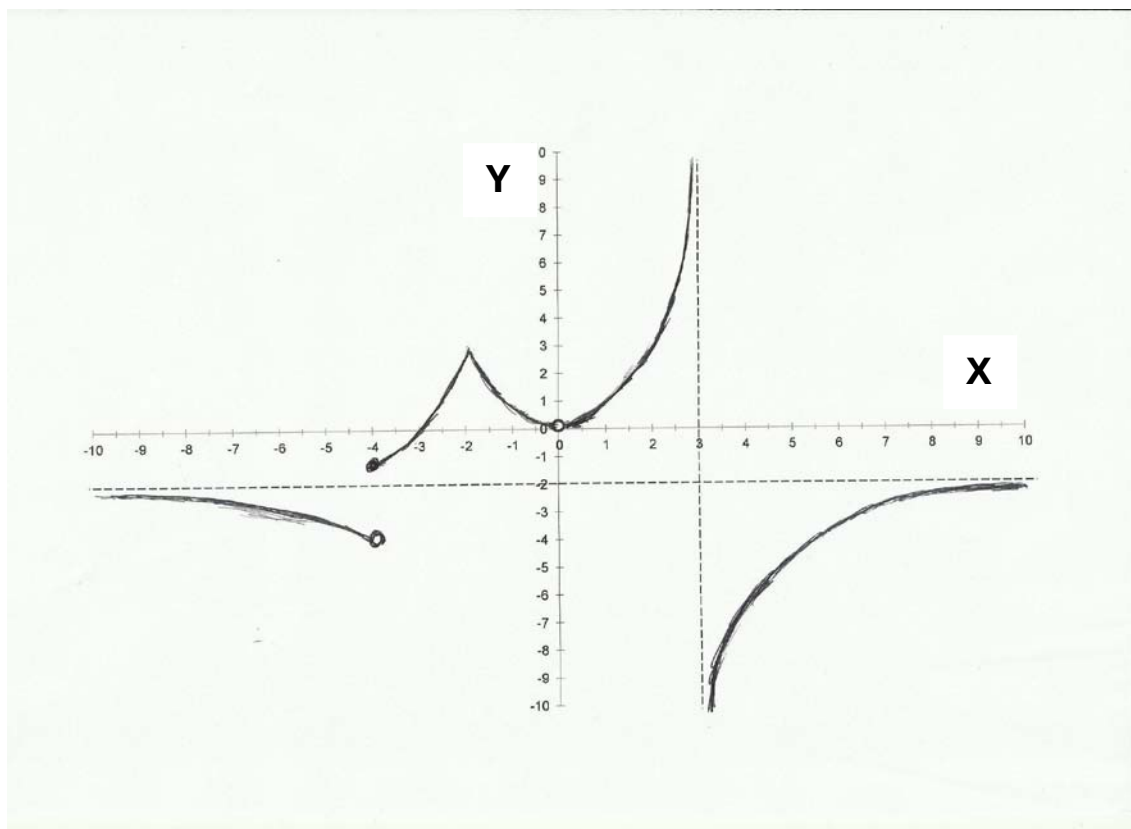
$$A = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx - \int_{\frac{7}{4}}^3 (4x - 7) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^3 + 2 \cdot [x]_0^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{\frac{7}{4}}^3 + 7 \cdot [x]_{\frac{7}{4}}^3$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) - (3^2 - 0^2) + 2 \cdot (3 - 0) - 2 \cdot \left[3^2 - \left(\frac{7}{4} \right)^2 \right] + 7 \cdot \left(3 - \frac{7}{4} \right)$$

$$A = \frac{27}{3} - 9 + 6 - 2 \cdot \left(9 - \frac{49}{16} \right) + 7 \cdot \left(\frac{12 - 7}{4} \right) = 9 - 3 - 2 \cdot \left(\frac{144 - 49}{16} \right) + \frac{35}{4} = 6 + \frac{35}{4} - 2 \cdot \frac{95}{16} = \frac{59}{4} - \frac{95}{8}$$

$$A = \frac{118 - 95}{8} = \frac{23}{8} u^2$$

2.- Determinar el dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes coordenados, asíntotas, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad (concavidad hacia arriba y hacia abajo) de la siguiente función
[2'5 puntos]



$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

$$\text{Rec}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\text{Puntos de corte} \Rightarrow \begin{cases} \text{Con OX} \Rightarrow x = 3 \\ \text{Con OY} \Rightarrow (\text{No existe}) \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Asíntota vertical} \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Asíntota horizontal} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ cuando } x \rightarrow \infty \\ y = -2 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{Máximo relativo} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{No derivable}$$

$$\text{Mínimo relativo} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Discontinuo} \Rightarrow \begin{cases} x = 0^+ \\ x = 0^- \end{cases}$$

No hay puntos de inflexión

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (-4 < x < -2) \cup (0 < x < 3) \cup (x > 3)$$

$$\text{Decrecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (x < -4) \cup (-2 < x < 0) \cup (x > 3)$$

$$\text{Concavidad} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / -4 < x < 3$$

$$\text{Convexidad} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (x < -4) \cup (x > 3)$$

Ejercicio 3.- Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k :

$$\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

[2'5 puntos]

Para que haya posible compatibilidad el determinante de los coeficientes ampliado tiene que ser nulo ya que una de las ecuaciones tiene que ser combinación lineal de las otras dos

$$|A/B| = 0 \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3k - 5k - 2 \cdot (6k + 10k) \Rightarrow$$

$$-8k - 32k = 0 \Rightarrow -40k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Para todo valor de $k \neq 0 \Rightarrow$ Sistema Incompatible

Cuando $k = 0$

$$\begin{cases} -z = 2 \\ 3x = 0 \\ 5x = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow x + 2z = 1 \Rightarrow 0 + 2 \cdot (-2) \neq 1 \Rightarrow -4 \neq 1 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Ejercicio 4.-

- a) Determinar si los puntos **A(-1, 0, 3)**, **B(2, 4, 1)** y **C(-4, 3, 1)** están alineados [1 punto]
 b) Expresar de dos formas diferentes la ecuación de la recta que pasa por **A** y **B** [1'5 puntos]

a) Para saber si los puntos A, B y C están alineados los vectores AB y AC deben de ser iguales o proporcionales

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 4, 1) - (-1, 0, 3) = (3, 4, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, 3, 1) - (-1, 0, 3) = (-3, 3, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{3} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \text{No están alineados}$$

b)

$$\text{Forma continua} \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{Forma paramétrica} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$