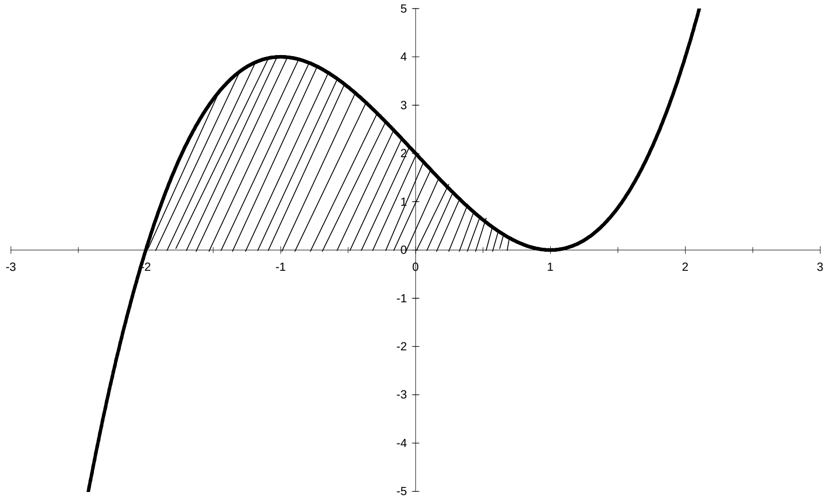
Opción A

1..- Se sabe que la gráfica de la función **f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c** es la que aparece en el dibujo



a) Determina la función [**1'5 puntos]**

b) Calcula el área de la función sombreada **[1 punto]**

a)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow 0^3 + a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2 \\ f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2 + 2a\cdot(-1) + b = 0 \end{cases} \begin{cases} a + b = -3 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -a - b = 3 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow -3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 0 + b = -3 \Rightarrow b = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

b)

$$A = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-2}^{1} - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{1} + 2\cdot\left[x\right]_{-2}^{1}$$

$$A = \frac{1}{4}\cdot\left[1^4 - (-2)^4\right] - \frac{3}{2}\cdot\left[1^2 - (-2)^2\right] + 2\cdot\left[1 - (-2)\right] = \frac{1}{4}\cdot(1 - 16) - \frac{3}{2}\cdot(1 - 4) + 2\cdot(1 + 2)$$

$$A = -\frac{15}{4} - \frac{3\cdot(-3)}{2} + 2\cdot 3 = -\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 6 = \frac{-15 + 18 + 12}{4} = \frac{15}{4}\ u^2$$

2.- Dada la función $f(x)=\frac{2x^2-3x}{e^x}$

a) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función **f [1.5 puntos]**
b) Calcular los máximos y mínimos relativos de **f [1 punto]**

a)

$$f'(x)=\frac{(4x-3)\,e^x-e^x\left(2x^2-3x\right)}{e^{2x}}=\frac{\left(4x-3-2x^2+3x\right)e^x}{e^{2x}}=\frac{-2x^2+7x-3}{e^x}=-\frac{2x^2-7x+3}{e^x}$$

$$2x^2-7x+3=0\Rightarrow\Delta=(-7)^2-4\cdot2\cdot3=49-24=25>0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2\cdot2}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{7+5}{4}=3\\ x=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$2x^2-7x+3=2\,(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-3)(2x-1)$$

$$f'(x)=(-1)\frac{(x-3)(2x-1)}{e^x}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow\ f'(x)>0\Rightarrow(-1)\frac{(x-3)(2x-1)}{e^x}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-1<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-3>0\Rightarrow x>3\\ 2x-1>0\Rightarrow x>\frac{1}{2}\\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a **3**	**3** a ∞
-1 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > 3	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > $\frac{1}{2}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
e^x > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/\frac{1}{2}<x<3$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/\left(x<\frac{1}{2}\right)\cup(x>3)$

b)

$$Mínimo\ relativo\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\sqrt{e}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{\sqrt{e}}{e}\Rightarrow De\ decrecimiento\ pasa\ a\ crecimiento$$

$$Máximo\ relativo\Rightarrow x=3\Rightarrow\ f(3)=\frac{2\cdot3^2-3\cdot3}{e^3}=\frac{18-9}{e^3}=\frac{9}{e^3}\Rightarrow De\ crecimiento\ pasa\ a\ decrecimiento$$

3.- Resolver la ecuación matricial **B.(2A + I) = A.X.A + B**, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad e \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ **[2’5 puntos]**

AXA= B(2A + I) - B $\Rightarrow$ **AXA= B(2A + I - I)** $\Rightarrow$ **$A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}$ 2BAA^{-1}** $\Rightarrow$ **IXI = A^{-1} 2BI** $\Rightarrow$

X= 2A^{-1}B

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

4.- Dada las rectas $r\equiv\begin{cases}x-y-2=0\\ y-z+3=0\end{cases}$ y $s\equiv\dfrac{x-1}{-2}=y+1=z-2$

a) Determinar su posición relativa **[1 punto]**
b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte **[1’5 puntos]**

a) Analizaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, de serlo estudiaremos si tienen punto común si es afirmativo las rectas son coincidentes sino paralelas.
Si no hay igualdad o proporcionalidad buscaremos si tienen un punto común, si eso sucede son rectas secantes o que se cortan en un punto.
De no darse ninguno de los supuestos anteriores las rectas se cruzan

$a)$

$$r\equiv\begin{cases}x=2+y\\ z=3+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=\lambda\\ z=3+\lambda\end{cases}\\ s\equiv\begin{cases}x=1-2\mu\\ y=-1+\mu\\ z=2+\mu\end{cases}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,1,1)\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-2}\neq\frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ paralelas\ ni\ coincidentes$$

$Veamos\ si\ tienen\ un\ punto\ P\ común$

$$\begin{cases}2+\lambda=1-2\mu\\ \lambda=-1+\mu\\ 3+\lambda=2+\mu\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda+2\mu=-1\\ \lambda-\mu=-1\\ \lambda-\mu=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda+2\mu=-1\\ -\lambda+\mu=1\end{cases} \Rightarrow 3\mu=0 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow \lambda-0=-1 \Rightarrow \lambda=-1$$

$Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow Las\ rectas\ son\ secantes\ o\ se\ cortan\ en\ un\ punto$

$b)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-2,1,1)\end{cases} \Rightarrow cos\ \alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left|(1,1,1)\cdot(-2,1,1)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}=\frac{|-2+1+1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{0}{3\sqrt{2}}=0 \Rightarrow$$

$$\alpha=arc\ cos\ 0=90^o=\frac{\pi}{2}\ rad \Rightarrow Son\ perpendiculares$$

Continuación del Problema 4 de la opción A

b)Continuación

$$Con\ \lambda = -1 \Rightarrow P\begin{cases} x = 2 - 1 \\ y = -1 \\ z = 3 - 1 \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ corte\ entre\ las\ rectas \Rightarrow P(1\ , -1\ , 2)$$

Opción B

1..- Sabiendo que la función $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^3+bx^2+8x-4}$ es discontinua en **x = 2**, calcula b y justifica razonadamente el comportamiento de la función en la proximidad de los puntos de discontinuidad **[2'5 puntos]**

$$Cuando\ x=2 \Rightarrow x^3+bx^2+8x-4=0 \Rightarrow 2^3+b\cdot 2^2+8\cdot 2-4=0 \Rightarrow 8+4b+16-4=0 \Rightarrow 4b+20=0$$

$$4b=-20 \Rightarrow b=-\frac{20}{4}=-5 \Rightarrow$$

$$x^3-5x^2+8x-4=0 \Rightarrow Veamos\ si\ hay\ mas\ puntos\ de\ discontinuidad$$

$$Por\ Ruffini\quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \qquad (x-2)\left(x^2-3x+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{3x-4}{(x-2)^2\cdot(x-1)}$$

$$Cuando\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{3\cdot 2-4}{\left(2^+-2\right)^2\cdot\left(2^+-1\right)}=\dfrac{6-4}{\left(0^+\right)^2\cdot 1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{3\cdot 2-4}{\left(2^--2\right)^2\cdot\left(2^--1\right)}=\dfrac{6-4}{\left(0^-\right)^2\cdot 1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

$$Cuando\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{3\cdot 1-4}{\left(1^+-2\right)^2\cdot\left(1^+-1\right)}=\dfrac{3-4}{(-1)^2\cdot 0^+}=\dfrac{-1}{1\cdot 0^+}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to Q^-} f(x)=\dfrac{3\cdot 2-4}{\left(1^--2\right)^2\cdot\left(1^--1\right)}=\dfrac{3-4}{(-1)^2\cdot 0^-}=\dfrac{-1}{1\cdot 0^-}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty \end{cases}$$

2.- a) Calcular el valor de **a** para que la integral entre **0** y **a** de la función **xe^{x}** sea **1**
[1'25 puntos]

b) Resolver la integral indefinida $\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}$ **[1'25 puntos]**

a)

$$\int_0^a xe^x\ dx = 1 \Rightarrow \left[xe^x\right]_0^a - \int_0^a e^x\ dx = 1 \Rightarrow \left(ae^a - 0\cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^a = 1 \Rightarrow \left(ae^a - 0\cdot 1\right) - \left(e^a - e^0\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x\ dx = dx \Rightarrow v = \int e^x\ dx = e^x \end{cases}$$

$$\left(ae^a - 0\right) - \left(e^a - 1\right) = 1 \Rightarrow ae^a - e^a + 1 = 1 \Rightarrow ae^a - e^a = 0 \Rightarrow (a-1)e^a = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

b)

$$I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t}{t^2+t} dt = 2\int \frac{t}{(t+1)t}\ dt = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ ln\ u = ln\ u^2 = ln\ (t+1)^2$$

$$x + 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt \qquad\qquad t + 1 = u \Rightarrow dt = du$$

$$I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}} = ln\left(\sqrt{x+1} + 1\right)^2 + K$$

3.- Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro **a** $\begin{cases} a^2x+3y+2z=0 \\ ax-y+z=0 \\ 8x+y+4z=0 \end{cases}$

Resolverlo en los casos posibles **[2'5 puntos]**

Es un sistema homogéneo y por ello, es Compatible Determinado, con solución trivial, en aquellos casos en que el determinante de los coeficientes no es nulo, siendo Compatible Indeterminado cuando es determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4a^2+24+2a+16-a^2-12a = -5a^2-10a+40 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -5a^2-10a+40=0$$

$$5a^2+10a-40=0 \Rightarrow \Delta = 10^2-4\cdot 5\cdot(-40) = 100+800=900>0 \Rightarrow a=\frac{-10\pm\sqrt{900}}{2\cdot 5} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-10+30}{10} \\ a=\dfrac{-10-30}{10} \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall a \in \Re - \{-4\ ,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$
$$Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(0\ ,0\ ,0) \Rightarrow Solución\ trivial$$

$Cuando\ a=-4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ -16 & -4 & 4 & 0 \\ -16 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow$$

$$z=\frac{0}{0} \Rightarrow Infinitas\ soluciones \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow -y+6z=0 \Rightarrow y=6z \Rightarrow$$

$$16x+3\cdot 6z+2z=0 \Rightarrow 16x+20z=0 \Rightarrow 16x=-20z \Rightarrow x=-\frac{20}{16}z=-\frac{5}{4}z \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=\left(-\frac{5}{4}\lambda\ ,6\lambda\ ,\lambda\right)$$

$Cuando\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & -4 & 0 \\ -8 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=0 \Rightarrow$$

$$z=\frac{0}{0} \Rightarrow Infinitas\ soluciones \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow y=0 \Rightarrow 4x+2z=0 \Rightarrow$$

$$2z=-4x \Rightarrow z=-2x \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(\mu\ ,0\ ,-2\mu)$$

4.- Determinar la ecuación general (implícita) del plano paralelo a las rectas $r \equiv x = y + 1 = z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ y que pasa por el origen de coordenadas **[2'5 puntos]**

El vector director del plano buscado π es perpendicular a las dos rectas y lo hallaremos calculando el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.
Una vez hallado este vector es perpendicular al vector determinado por el origen de coordenadas **O**, que va a contener, y por el punto **G** que es el que genera el plano y, debido a ello el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación del plano que se pide

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (3\ ,0\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = (0\ ,3\ ,-3) \equiv (0\ ,1\ ,-1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (0\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{OG} = (x\ ,y\ ,z) - (0\ ,0\ ,0) = (x\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow (0\ ,1\ ,-1) \cdot (x\ ,y\ ,z) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv y - z = 0$$