OPCIÓN A

1..- Sea la función real de variable real: $\begin{cases} \left(1-x^2\right)^2 & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{36}{2+x} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real

b) Razonar si la función es derivable en toda la recta real

a) La función es continua en toda la recta real menos en **x = 2**

Podía ser, también, discontinua en **x = -2** si en es punto la función hubiese sido $\dfrac{36}{2+x}$

Veamos si es continua en **x = 2**

$$\begin{cases} f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \left(1-2^2\right)^2 = (1-4)^2 = (-3)^2 = 9 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{36}{2+2} = \dfrac{36}{4} = 9 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 9$$

$$Es\ continua\ en\ x = 2, por\ ello\ la\ \ función\ es\ continua\ en\ toda\ la\ recta\ real$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot (-2x)\left(1-x^2\right) & si \quad x < 2 \\ -\dfrac{36}{(2+x)^2} & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = (-4) \cdot 2 \cdot \left(1-2^2\right) = (-8) \cdot (-3) = 24 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = -\dfrac{36}{(2+2)^2} = -\dfrac{36}{16} = -\dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = 24 \ne \lim_{x \to 2^+} f'(x) = -\frac{9}{4} \Rightarrow No\ derivable\ en\ x = 2$$

$$La\ \ función\ es\ derivable\ en\ toda\ la\ recta\ real\ menos\ en\ x = 2$$

2.- El consumo de un barco navegando a una velocidad de x nudos (millas/hora) viene dado por la expresión $C(x) = \dfrac{x^2}{60} + \dfrac{450}{x}$. Calcular la velocidad más económica y el coste equivalente

$$C'(x) = \frac{2x}{60} - \frac{450}{x^2} = \frac{x}{30} - \frac{450}{x^2} \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{30} - \frac{450}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{30} = \frac{450}{x^2} \Rightarrow x^3 = 450 \cdot 30 = 13500 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{13500} = 15\sqrt[3]{4} \Rightarrow C''(x) = \frac{1}{30} + \frac{450}{x^4} \Rightarrow C''\left(15\sqrt[3]{4}\right) = \frac{1}{30} + \frac{450}{15^4 \sqrt[3]{4^4}} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 15\sqrt[3]{4}\ nudos \\ C\left(15\sqrt[3]{4}\right) = \dfrac{15^2 \sqrt[3]{4^2}}{60} + \dfrac{450}{15\sqrt[3]{4}} = \dfrac{15 \cdot 2\sqrt[3]{2}}{4} + \dfrac{30}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{30\sqrt[3]{2}}{4} + \dfrac{30\sqrt[3]{4^2}}{4} = \dfrac{30\sqrt[3]{2}}{4} + \dfrac{60\sqrt[3]{2}}{4} = \dfrac{90\sqrt[3]{2}}{4} = \dfrac{45\sqrt[3]{2}}{2} \end{cases}$$

3.- Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **m**: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 4x+y-3z=-5 \\ 3x-y+mz=m-1 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix}=m+18-4-3-3+8m=9m+8\Rightarrow |A|=0\Rightarrow=9m+8=0\Rightarrow 9m=-8\Rightarrow m=-\frac{8}{9}$$

$$\forall m\in\Re-\left\{-\frac{8}{9}\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m=-\frac{8}{9}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & -\frac{8}{9} & -\frac{8}{9}-1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -5 \\ 27 & -9 & -8 & -17 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -5 \\ 0 & 45 & -35 & -17 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=8\Rightarrow$$

$$z=\frac{8}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

4.- a) Halla la ecuación del plano determinado por los puntos: **A(1 , 3 , 2)** , **B(2 , 0 , 1)** y **C(1 , 4 , 3)**

b) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior , hallando el punto de intersección en caso de que se corten

a) El plano π queda determinado por los vectores que unen **A** con **B**, **A** con **C** y el vector que une **A** con el punto **G** generador del plano. Estos tres planos son coplanarios y uno es combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\ ,0\ ,1) - (1\ ,3\ ,2) = (1\ ,-3\ ,-1) \equiv (-1\ ,3\ ,1) \\ \overrightarrow{AC} = (1\ ,4\ ,3) - (1\ ,3\ ,2) = (0\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,3\ ,2) = (x-1\ ,y-3\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3\ (x-1) - (z-2) - (x-1) + (y-3) = 0 \Rightarrow 2\ (x-1) + (y-3) - (z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$$

b) Un plano y una recta pueden ser paralelos o cortarse, en el primer caso los vectores directores son perpendiculares y por ello su producto escalar nulo, si no es así se cortarán en un punto P que se halla verificando los puntos de la recta en el plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (3\ ,1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = (2\ ,1\ ,-1) \cdot (3\ ,1\ ,2) = 6 + 1 - 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow Se\ cor\tan\ en\ un\ \ punto$$

$$2\ (3\lambda + 1) + (\lambda + 2) - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 2 + \lambda + 2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$P \begin{cases} x = 3\left(-\frac{1}{6}\right) - 1 = -\frac{1}{6} - 1 = -\frac{7}{6} \\ y = -\frac{1}{6} + 2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ z = 2\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{7}{6}\ ,\frac{5}{3}\ ,-\frac{1}{3}\right)$$

OPCIÓN B

1..- Calcular $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx$

$$\begin{array}{rl} x^3 - 2x^2 + x - 1 & \lfloor x^2 - 3x + 2 \\ \underline{- x^3 + 3x^2 - 2x} & x + 1 \\ x^2 - x - 1 & \\ \underline{- x^2 + 3x - 2} & \\ 2x - 3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} \Rightarrow A(x - 2) + B(x - 1) = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$Si \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow A(2 - 2) + B(2 - 1) = 2 \cdot 2 - 3 \Rightarrow B = 1 \\ x = 1 \Rightarrow A(1 - 2) + B(1 - 1) = 2 \cdot 1 - 3 \Rightarrow -A = -1 \Rightarrow A = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$$

$$I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \int (x + 1)\, dx + \int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{1}{x - 1}\, dx + \int \frac{1}{x - 2}\, dx$$

$$x - 1 = t \Rightarrow dx = dt \qquad x - 1 = u \Rightarrow dx = du$$

$$I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{dt}{t} + \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln t + \ln u = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln (t \cdot u)$$

$$I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln [(x - 1)(x - 2)] = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln (x^2 - 3x + 2) + K$$

2.- Determinar los valores a y b para que la siguiente función sea derivable

$$\begin{cases} bx^2 + ax & si \quad x \le -1 \\ \dfrac{a}{x} & si \quad -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x+1} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Primeramente tiene que ser continua

$$\begin{cases} \begin{cases} f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = b\,(-1)^2 + a\,(-1) = b - a \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{a}{(-1)} = -a \end{cases} \Rightarrow b - a = -a \Rightarrow b = 0 \\ \begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{a}{1} = a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1^2 + a \cdot 1 + 1}{1+1} = \dfrac{a+2}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{a+2}{2} \Rightarrow 2a = a + 2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \le -1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad -1 < x \le 1 \\ x + 1 & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si \quad -1 < x < 1 \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Veamos si son derivables

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = 2\,(-1) = -2 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\dfrac{2}{(-1)^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow Es\ derivable\ en\ x = -1 \\ \begin{cases} f'(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\dfrac{2}{1} = -2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \ne 1 \Rightarrow No\ es\ derivable\ en\ x = -1 \end{cases}$$

3.- Resolver la ecuación matricial **AX + B = A²** y determinar la matriz X, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$AX=A^2+B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}\left(A^2+B\right)\Rightarrow IX=A^{-1}A^2+A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}AA+A^{-1}B\Rightarrow X=IA+A^{-1}B$$
$$\Rightarrow X=A+A^{-1}B$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow\exists A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-3&-2\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-3&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}$$

4.- Estudiar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro λ:
$x+\lambda y+z-4=0\qquad x+3y+z-5=0\qquad \lambda x+y+z-4=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&\lambda&1\\1&3&1\\\lambda&1&1\end{vmatrix}=3+\lambda^2+1-3\lambda-1-\lambda=\lambda^2-4\lambda+3\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4\geq 0\Rightarrow\lambda=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{4+2}{2}=3\\[2mm]\lambda=\dfrac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

$\forall\lambda\in\Re-\{1,3\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=$ *número de incognitas* $\Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Los tres planos se cortan en un punto

Si $\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\1&3&1&5\\1&1&1&4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&2&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow \textit{Sistema Compatible Indeterminado}$$

El primer y tercer plano son el mismo plano y se cortan con el segundo según una recta

Continuación del Problema 4 de la Opción B

$Si\ \lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Los planos primero y segundo son paralelos y se cortan con el tercer según dos rectas paralelas