Opción A

1..- Dada la función **f(x)** definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & (x\le 1) \\ -x^2+nx & (x>1) \end{cases}$ se pide:

a) Calcular los valores de los parámetros **m** y **n** para que sea continua y derivable en todos los puntos del intervalo **[-20 , 20]**
b) Dibujar esquemáticamente la gráfica de la función, señalando los extremos

a)

Continuidad

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1^2-5\cdot 1+m=m-4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1^2+n\cdot 1=n-1 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=m-4=\lim_{x\to 1^+} f(x)=n-1 \Rightarrow m-n=3$$

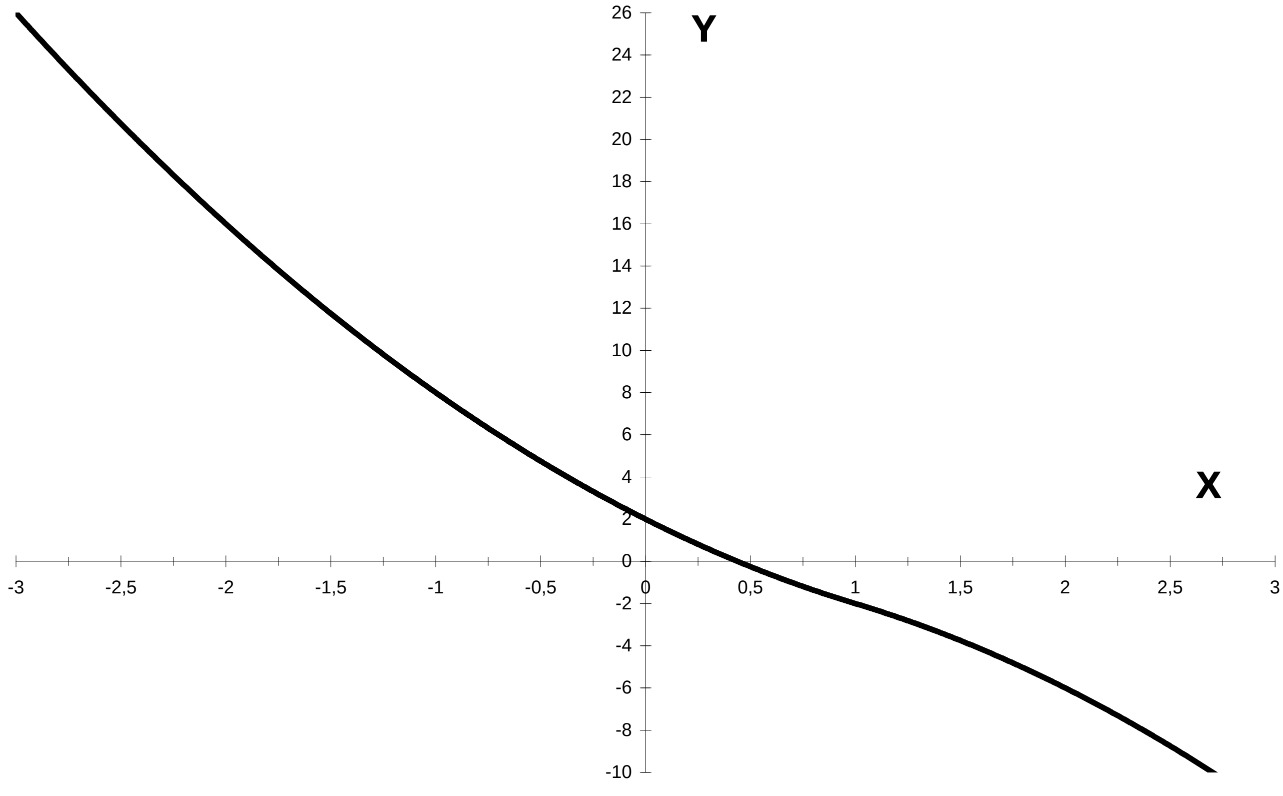
Derivable

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & (x<1) \\ -2x+n & (x>1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=2\cdot 1-5=-3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-2\cdot 1+n=n-2 \end{cases} \lim_{x\to 1^-} f'(x)=-3=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=n-2 \Rightarrow n=-1$$

$$m-(-1)=3 \Rightarrow m=2$$

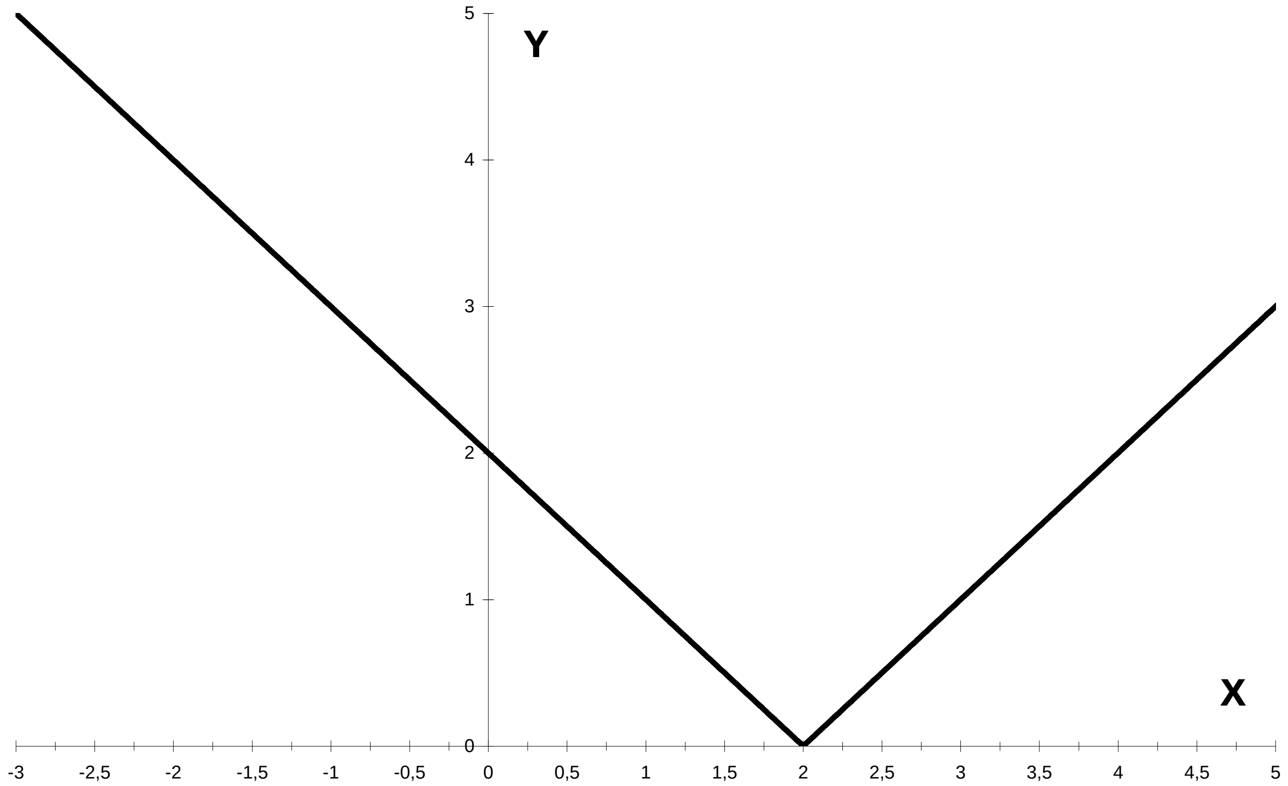
$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+2 & (x\le 1) \\ -x^2-x & (x>1) \end{cases}$$

b)



2.- Representar gráficamente la función $g(x)=|x-2|$ y hallar el área limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas de ecuaciones **x = -1** y **x = 3**

$$x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow g(x)=\begin{cases} -x+2 & si \quad x<2 \\ x-2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$



$$A=\int_{-1}^{2}(-x+2)\,dx+\int_{2}^{3}(x-2)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{2}+2\cdot[x]_{-1}^{2}+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{2}^{3}-2\cdot[x]_{2}^{3}$$

$$A=-\frac{1}{2}\cdot\left[2^2-(-1)^2\right]+2\cdot[2-(-1)]+\frac{1}{2}\cdot\left(3^2-2^2\right)-2\cdot(3-2)=-\frac{1}{2}\cdot(4-1)+2\cdot(2+1)+\frac{1}{2}\cdot(9-4)-2\cdot 1$$

$$A=-\frac{3}{2}+2\cdot 3+\frac{5}{2}-2=4+\frac{2}{2}=5\ u^2$$

3.- Resolver razonadamente el siguiente sistema, donde **A** y **B** son matrices desconocidas ¿de que tamaño serán?: $\begin{cases} 3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$

El tamaño de **A** y **B** es **2 x 2**

$$\begin{cases} 9A+6B=3\cdot\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 4A-6B=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13A=\begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6A+4B=2\cdot\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ -6A+9B=(-3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13B=\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Decidir si el plano $x+y+z=1$ también viene dado por la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\lambda-\mu \\ y=\frac{1}{2}+\lambda-\mu \\ z=2\mu \end{cases}$$

Con los datos de la ecuación paramétrica calcularemos la ecuación del plano y compararemos

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)+z+z+2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 2x-1+2z+2y-1=0 \Rightarrow$$

$$2x+2y+2z-2=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \text{Son iguales ecuación implicita y paramétrica son expresiones del mismo plano}$$

Opción B

1..- Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ determinar los valores de **a**, **b** y **c** sabiendo que la gráfica de **f(x)** pasa por los puntos **(0 , 3)** y **(1 , 4)** y que la recta **y = 4** es tangente a dicha gráfica cuando **x = 1**

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \Rightarrow c = 3 \\ f(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 = 4 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \end{cases} \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$-1 + b = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

2.- Hallar las dimensiones (altura **h** y radio de la base **r**) de un cono recto de volumen máximo, sabiendo que la altura mas el radio de la base vale **12 m.** [*Nota*: El Volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$]

$$\begin{cases} 12 = h + r \Rightarrow h = 12 - r \\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 (12 - r) = \frac{1}{3}\pi\left(12r^2 - r^3\right) \Rightarrow V' = \frac{dV}{dr} = \frac{1}{3}\pi\left(24r - 3r^2\right) \Rightarrow$$

$$V' = \frac{dV}{dr} = \frac{3}{3}\pi\left(8r - r^2\right) = \pi\left(8r - r^2\right) \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow \pi\left(8r - r^2\right) = 0 \Rightarrow 8r - r^2 = 0 \Rightarrow (8 - r)r = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ 8 - r = 0 \Rightarrow r = 8 \end{cases} \Rightarrow V'' = \frac{d^2V}{dr} = \pi(8 - 2r) = 2\pi(4 - r) \Rightarrow \begin{cases} V''(0) = 2\pi(4 - 0) = 8\pi > 0 \Rightarrow Mínimo \\ V''(8) = 2\pi(4 - 8) = -8\pi < 0 \Rightarrow Máximo \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 8\ m. \\ h = 12 - 8 = 4\ m. \end{cases}$$

3.- Se considera la matriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$**.** Hallar el valor del parámetro **k** para que el determinante $\left|M^2 - kM\right|$ sea nulo.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^2 - k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 - k \\ -2 + k & 3 - 2k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|M^2 - kM\right| = \begin{vmatrix} -1 & 2 - k \\ -2 + k & 3 - 2k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3 - 2k) - (2 - k)(k - 2) = 0 \Rightarrow -3 + 2k - \left(2k - 4 - k^2 + 2k\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-3 + 2k - 4k + 4 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \geq 0 \Rightarrow k = \frac{2}{2} = 1$$

4.- Calcular el valor de **a** para que los cuatro puntos siguientes estén en un mismo plano
(1 , 0 , 0), **(0 , 1 , 0)**, **(0 , 0 , 1)** y **(1 , 1 , a)**,

Nominando a los puntos **A**, **B**, **C** y **D** respectivamente calcularemos la ecuación del plano π que contenga a los tres primeros, para ello hallaremos los vectores **AB**, **AC** y **AG** siendo **G** el punto genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (contenidos en el mismo plano) siendo el último vector combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación del plano buscado.
Una vez obtenido el plano calcularemos el parámetro pedido para que el punto **D** pertenezca a él

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0\ ,1\ ,0) - (1\ ,0\ ,0) = (-1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,0\ ,1) - (1\ ,0\ ,0) = (-1\ ,0\ ,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (1\ ,0\ ,0) = (x-1\ ,\ y\ ,\ z) \end{array}\right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 + z + y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$$

$$Hagamos\ que\ el\ \ punto\ D\ \ pertenezca\ al\ \ plano\ \pi \Rightarrow 1 + 1 + a - 1 = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$