

OPCIÓN A

1.- Hallar los valores de los números **a** y **b** para que la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ resulte derivable para todos los valores de } x$$

Para ser derivable la función tiene que ser, primeramente, continua

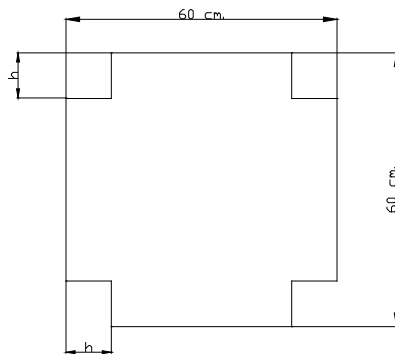
$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a \cdot 1 + 5 = a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot \sqrt{1} + \frac{b}{1} = a + b \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow a + 5 = a + b \Rightarrow b = 5$$

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{1}} - \frac{5}{1^2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \Rightarrow a = \frac{a}{2} - 5 \Rightarrow$$

$$a - \frac{a}{2} = -5 \Rightarrow \frac{a}{2} = -5 \Rightarrow a = -10$$

$$f(x) = \begin{cases} 10x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ 10\sqrt{x} + \frac{5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.- A partir de una cartulina cuadrada de **60 cm.** de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen **10 cm.** de lado. Decidir si la observación es correcta o no.



$$V = (60 - 2h)^2 h \Rightarrow V' = \frac{dV}{dh} = 2(60 - 2h)(-2)h + (60 - 2h)^2 = (-4)(60h - 2h^2) + 3600 - 240h + 4h^2$$

$$V' = -240h + 8h^2 + 3600 - 240h + 4h^2 = 12h^2 - 480h + 3600 = 12(h^2 - 40h + 300) \Rightarrow$$

$$V' = 0 \Rightarrow 12(h^2 - 40h + 300) = 0 \Rightarrow h^2 - 40h + 300 = 0 \Rightarrow \Delta = (-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 300 = 400 > 0 \Rightarrow$$

$$h = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{40 + 20}{2} = 30 \\ h = \frac{40 - 20}{2} = 10 \end{cases} \Rightarrow V'' = \frac{d^2V}{dh^2} = 12(2h - 40) = 24(h - 20) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V''(30) = 24(30 - 20) = 240 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ V''(10) = 24(10 - 20) = -240 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases} \Rightarrow h = 10 \text{ cm.}$$

Tenia razón el observador

3.- Discutir y resolver el siguiente sistema de acuerdo con los valores del parámetro **m**

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + m^2z = m - 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 15m^2 + 16 - 4 - 24 + 5 - 8m^2 = 7m^2 - 7 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 7m^2 - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$7(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$
Soluciones para el Sistema Compatible Determinado para todos los valores de m que lo cumplen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ m-1 & -1 & m^2 \end{vmatrix}}{7m^2 - 7} = \frac{4(m-1) - 6(m-1)}{7(m-1)(m+1)} = \frac{-2(m-1)}{7(m-1)(m+1)} = -\frac{2}{7(m+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & m^2 & m-1 \end{vmatrix}}{7m^2 - 7} = \frac{4m^2 - 5m^2}{7(m-1)(m+1)} = -\frac{m^2}{7(m-1)(m+1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & m-1 \end{vmatrix}}{7m^2 - 7} = \frac{15(m-1) - 8(m-1)}{7(m-1)(m+1)} = \frac{7(m-1)}{7(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}$$

Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ -10 & -15 & -5 & 0 \\ -20 & 5 & -5 & 10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 10$$

$$z = \frac{10}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ -10 & -15 & -5 & 0 \\ -20 & 5 & -5 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera es combinación}$$

lineal de las otras dos $\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow -7y - z = 0 \Rightarrow z = -7y \Rightarrow$

$$5x + 4y + 2 \cdot (-7y) = 0 \Rightarrow 5x - 10y = 0 \Rightarrow 5x = 10y \Rightarrow x = 2y \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (2\lambda, \lambda, -7\lambda)$$

4.- Comprobar si los puntos **(1, 2, 3)**, **(1, -2, 4)** y **(1, -3, 5)** están alineados. En caso negativo, determinar la ecuación del único plano que los contiene.

Si están alineados **A**, **B** y **C**, respectivamente nominados los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, -2, 4) - (1, 2, 3) = (0, -4, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -3, 5) - (1, 2, 3) = (0, -5, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{-5} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{No están alineados}$$

Para hallar el plano π que los contiene tenemos los vectores ante dichos **AB** y **AC** y un tercer vector formado por el punto **A** y el punto **G** generador del plano, los tres vectores son coplanarios y el último es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, -4, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -5, 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x-1, y-2, z-3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8(x-1) + 5(x-1) = 0 \Rightarrow -3(x-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-1=0$$

OPCIÓN B

1.- Hallar el valor del parámetro **a** sabiendo que el área que limitada por la gráfica **y = x² - ax** y el eje **OX** es $\frac{32}{5}$

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow (x - a)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - a = 0 \Rightarrow x = a \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\left| \int_0^a (x^2 - ax) dx \right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left| \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^a - a \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^a \right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left| \frac{1}{3} \cdot (a^3 - 0^3) - \frac{a}{2} \cdot (a^2 - 0^2) \right| = \frac{32}{5} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left| \frac{2a^3 - 3a^3}{6} \right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \left| \frac{-a^3}{6} \right| = \frac{32}{5} \Rightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{32}{5} \Rightarrow a^3 = \frac{192}{5} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{192}{5}}$$

$$a = \frac{4\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5^2}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{75}}{5}$$

2.- Trazar la gráfica de una función **f(x)** que satisface las siguientes propiedades

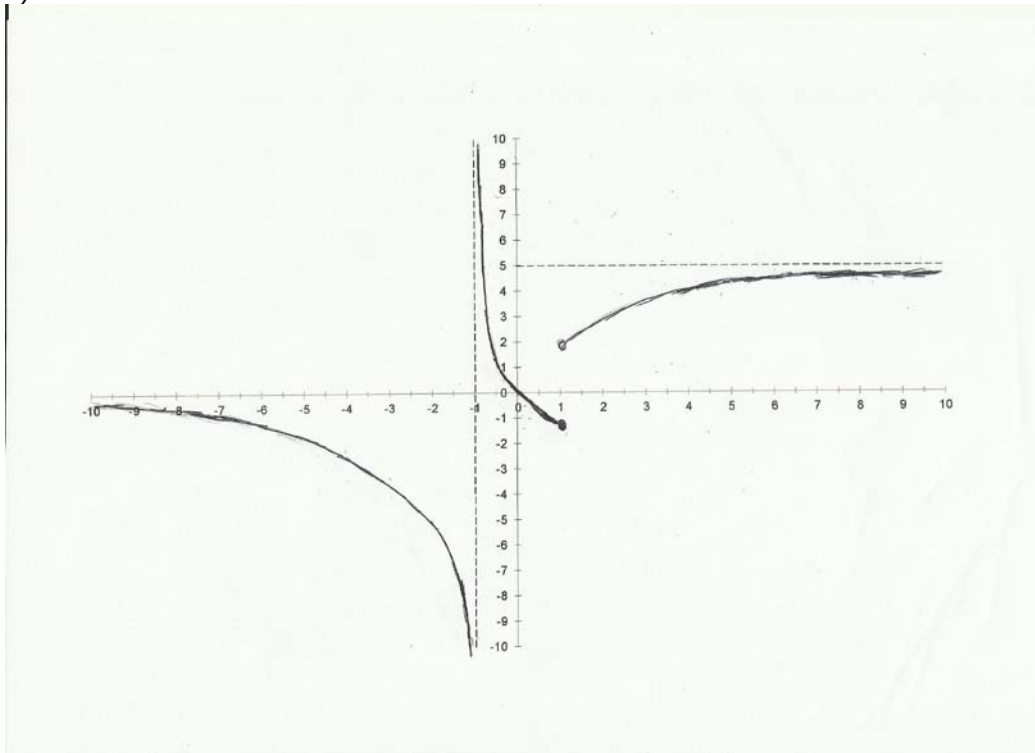
a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) **f(0) = 0**

c) No tiene máximos ni mínimos

d) Para $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 5$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} \infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} -\infty$

e) Tiene una discontinuidad evitable en **x = 1**



3.- En este ejercicio son dos matrices A y B desconocidas que hay que hallar. Resolver el

siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4A - 2B = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -10 & -24 & -14 \\ -8 & -4 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -14 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6A + 3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ -6A - 4B = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -B = \begin{pmatrix} 15 & 36 & 21 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22 & -50 & 0 \\ -40 & -20 & -70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 21 \\ -28 & -14 & -49 \end{pmatrix} =$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

4.- En caso de que las dos rectas siguientes se corten en un punto, hallar las coordenadas del

mismo $r \equiv \begin{cases} x = -7 + 4\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}, \quad s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2}$

$$\begin{cases} -7 + 4\lambda = 3 + 2\mu \\ 1 - \lambda = -4 - 3\mu \\ 2 = -2\mu \end{cases} \Rightarrow \mu = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow 1 - \lambda = -4 - 3 \cdot (-1) \Rightarrow 1 - \lambda = -4 + 3 \Rightarrow 1 - \lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$-7 + 4 \cdot 2 = 3 + 2 \cdot (-1) \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible} \Rightarrow \text{Hay punto } P \text{ de corte}$$

$$P \begin{cases} x = -7 + 4 \cdot 2 \\ y = 1 - 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(1, -1, 2)$$