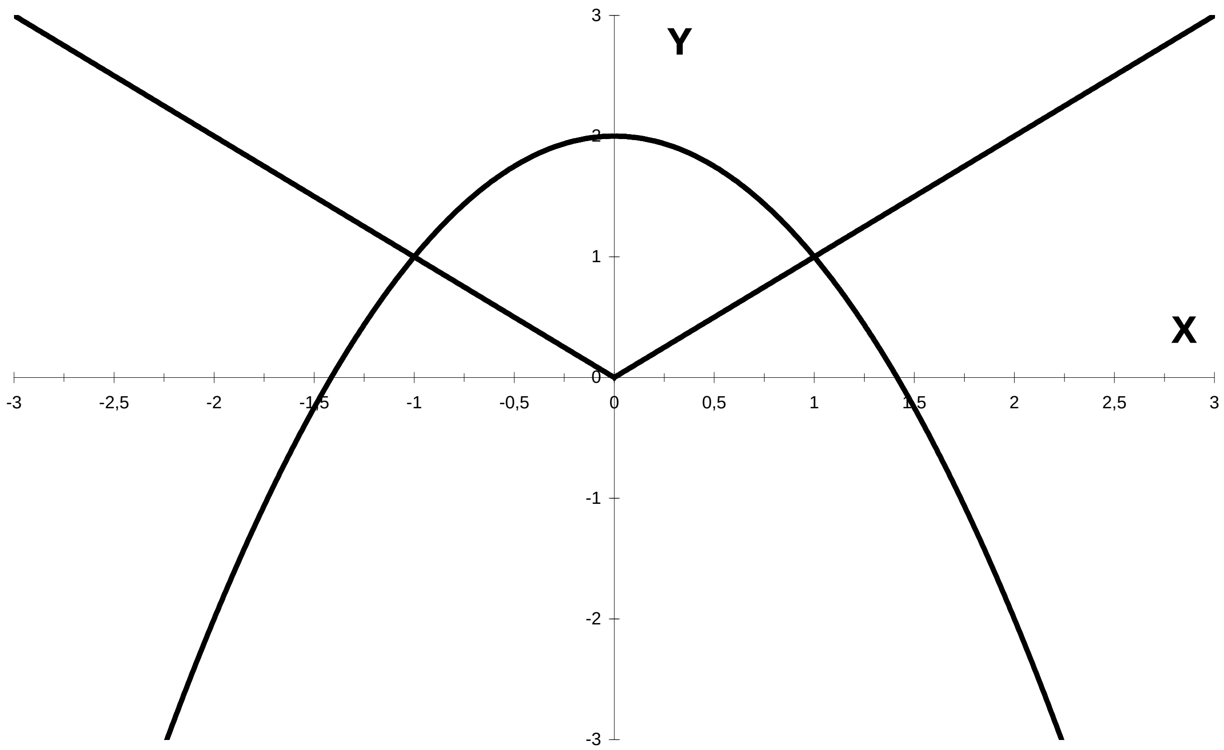
Opción A

1.- Dibujar la figura limitada por las curvas cuyas ecuaciones son $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = |x| \end{cases}$ y hallar el área de la misma

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$



Puntos de corte entre funciones

$$\begin{cases} 2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \notin (-\infty\ , 0) \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \\ 2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \dfrac{1-3}{2} = -2 \notin (0\ , \infty) \end{cases} \end{cases}$$

Son funciones simétrivas respecto al eje OY

$$A = 2\int_0^1 \left(2 - x^2\right) dx - 2\int_0^1 x\ dx = 2\int_0^1 \left(2 - x - x^2\right) dx = 4 \cdot [x]_0^1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^1$$

$$A = 4 \cdot (1 - 0) - \left(1^2 - 0^2\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(1^3 - 0^3\right) = 4 - 1 - \frac{2}{3} = 7 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}\ u^2$$

2.- Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para **13’5** metros cúbicos. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.

Llamando **B** al lado de la base y **H** a la altura del recipiente, tendremos que calcular el depósito de menor superficie

$$\begin{cases} 13'5 = B^2 H \Rightarrow H = \dfrac{13'5}{B^2} \\ S = B^2 + 4BH \end{cases} \Rightarrow S = B^2 + 4B \cdot \frac{13'5}{B^2} = B^2 + \frac{54}{B} \Rightarrow S' = \frac{dS}{dB} = 2B - \frac{54}{B^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow$$

$$2B - \frac{54}{B^2} = 0 \Rightarrow 2B = \frac{54}{B^2} \Rightarrow 2B^3 = 54 \Rightarrow B^3 = \frac{54}{2} = 27 \Rightarrow B = \sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{dB^2} = 2 + \frac{108}{B^3} \Rightarrow$$

$$S''(3) = 2 + \frac{108}{3^3} = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} B = 3\ m. \\ H = \dfrac{13'5}{3^2} = 1'5\ m. \end{cases}$$

3.- Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 3 & -k \end{pmatrix}$, discutir la existencia de su inversa en función del parámetro **k**.¿ Es posible el cálculo de la inversa para **k = 2**?. En caso afirmativo, hallarla

La condición necesaria para que exista la inversa de una matriz es que su determinante no sea nulo. Llamando **A** a la matriz propuesta

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 3 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 4k - 3 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 4k - 3 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \geq 0 \Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ k = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$(Para\ toda)\forall k \in \Re - \{1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow (Existe)\exists A^{-1}$$

$$Cuando\ k = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right) \Rightarrow$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Discutir la posición relativa de las recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + (m+1)z = 3 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx + 2y + 3z = 3$ en función del parámetro **m**

La recta y el plano pueden ser paralelos, que la recta este contenida en el plano o que se corten en un punto.
Si son paralelos, y como los vectores directores son perpendiculares, el producto escalar de ambos es nulo y si es así comprobaremos si tienen algún punto **R** común, (tomaremos el indicado en su ecuación) de darse este supuesto la recta esta contenida en el plano, de no verificarse tal hecho son paralelas.
Por fin si el producto escalar de los vectores no es nulo plano y recta se cortan en un punto

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + (m+1)z = 3 \\ -2x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 4y + (m+3)z = 5 \Rightarrow 4y = 5 - (m+3)z \Rightarrow y = \frac{5}{4} - \frac{(m+3)}{4} z \Rightarrow$$

$$-x + \frac{5}{4} - \frac{(m+3)}{4} z + z = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4} - 1 - \frac{(m+3-4)}{4} z \Rightarrow x = \frac{1}{4} - \frac{(m-1)}{4} z$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \left(-\frac{(m-1)}{4}, -\frac{(m+3)}{4}, 1 \right) \equiv (m-1, m+3, -4) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (m, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (m-1, m+3, -4) \cdot (m, 2, 3) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = m(m-1) + 2(m+3) - 12 = m^2 - m + 2m + 6 - 12 = m^2 + m - 6 \Rightarrow$$

$$Si\ \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$(Para\ toda) \forall m \in \Re - \{-3, 2\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} \neq 0 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

$$Siendo\ R\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 0 \right)$$

$$Si\ m = -3 \Rightarrow \pi \equiv -3x + 2y + 3z = 3 \Rightarrow -3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3.0 = 3 \Rightarrow \frac{7}{4} \neq 3 \Rightarrow Plano\ y\ recta\ son\ paralelos$$

$$Si\ m = 2 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y + 3z = 3 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3.0 = 3 \Rightarrow \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow El\ plano\ contiene\ a\ la\ recta$$

Opción B

1.- Se considera la función definida por $f(x)=\begin{cases} a\ sen\ x+b\ cos\ x, & x<\frac{\pi}{2} \\ sen^2 x-a\ cos\ x, & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ Determinar **a** y **b** para que sea continua y derivable para todos los valores de **x**

Analicemos la Continuidad

$$\begin{cases} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=a\ sen\ \frac{\pi}{2}+b\ cos\ \frac{\pi}{2}=a\cdot 1+b\cdot 0=a \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=sen^2\ \frac{\pi}{2}-a\ cos\ \frac{\pi}{2}=1^2-a\cdot 0=1 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\Rightarrow a=1$$

Para que sea derivable

$$f'(x)=\begin{cases} cos\ x-b\ sen\ x, & x<\frac{\pi}{2} \\ 2\ sen\ x\,cos\ x+sen\ x, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f'(x)=cos\ \frac{\pi}{2}-b\ sen\ \frac{\pi}{2}=0-b\cdot 1=-b \\ \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f'(x)=2\ sen\ \frac{\pi}{2}cos\ \frac{\pi}{2}+sen\ \frac{\pi}{2}=2\cdot 1\cdot 0+1=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f'(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f'(x)\Rightarrow -b=1\Rightarrow b=-1$$

2.- Obtener la expresión de una función **f(x)** sabiendo que $f'(x)=(x+1)\,e^{2x}$] y que $f(0)=\frac{5}{4}$

$$f(x)=\int (x+1)\,e^{2x}dx=(x+1)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=(x+1)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}=\frac{e^{2x}}{2}\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2x}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+K$$

$$Por\ \ partes\Rightarrow\begin{cases} x+1=u\Rightarrow dx=du \\ e^{2x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{2x}dx=\int e^t\,\frac{dt}{2}=\frac{e^t}{2}=\frac{e^{2x}}{2}\end{cases}$$

$$2x=t\Rightarrow 2\ dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$$f(0)=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{e^{2\cdot 0}}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)+K=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{e^0}{2}\cdot\frac{1}{2}+K=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+K=\frac{5}{4}\Rightarrow K=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$$

3.- En este ejercicio X e Y son dos matrices desconocidas que hay que calcular. Hallarlas sabiendo que satisfacen el sistema siguiente: $\begin{cases} 5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$.

$$\begin{cases} 10X+6Y=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ -9X-6Y=(-3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 15X+9Y=3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ -15X-10Y=(-5)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -Y=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- Determinar las posiciones relativas de las rectas: $r\equiv\begin{cases} -x+y=4 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$ y $s\equiv\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{3}$

Si los vectores directores de las rectas son proporcionales o iguales, pueden ser paralelas o coincidentes, en este segundo caso, además, tendrán un punto común, que hallaremos, en cado de no haberlo son paralelas.
Si no son iguales o proporcionales veremos si hay un punto común, que de ser cierto nos determinaran que las rectas se cortan en un punto del espacio, si esto no se cumple las rectas se cruzan

$$2y-2z=2\Rightarrow y-z=1\Rightarrow y=1+z\Rightarrow -x+1+z=4\Rightarrow x=z-3\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(3,3,3) \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow Son\ paralelas\ o\ coincidentes$$

$Veamos\ si\ tienen\ un\ punto\ común$

$$\begin{cases} -3+\lambda=3\mu \\ 1+\lambda=4+3\mu \\ \lambda=3+3\mu \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lambda-3\mu=3 \\ \lambda-3\mu=3 \\ \lambda-3\mu=3 \end{cases}\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado\Rightarrow$$

$Las\ rectas\ tienen\ infinitos\ puntos\ comunes\Rightarrow Son\ coincidentes$