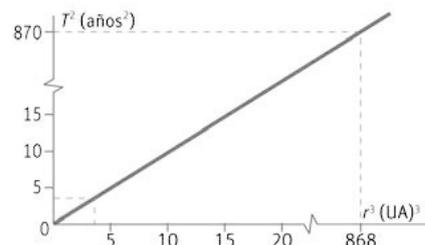


# 11 Estudio de situaciones dinámicas

## ACTIVIDADES

1. En la siguiente tabla se muestran los datos del periodo de algunos planetas y la distancia media al Sol en unidades astronómicas. Representa gráficamente  $T^2-r^3$ .

Planeta	Período (años terrestres)	Distancia media (UA)
Marte	1,88	1,53
Júpiter	11,8	5,20
Saturno	29,5	9,54
Urano	84,0	19,18



2. Razona sobre la veracidad o falsedad de las afirmaciones.

- a) Si un planeta A se encuentra dos veces más alejado del Sol que el planeta B, el periodo orbital de A es ocho veces mayor que el de B.  
 b) El periodo orbital de Ganimedes, una luna de Júpiter, es de 7,1664 días y su distancia media a Júpiter es  $1,07 \cdot 10^7$  m. La constante k de las lunas de Júpiter es distinta a la de los planetas del sistema solar.

a) Aplicando la 3.ª ley de Kepler,

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \Rightarrow \frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{r_A^3}{r_B^3} = \frac{(2r_B)^3}{r_B^3} = 8 \Rightarrow T_A = 2\sqrt{2} T_B$$

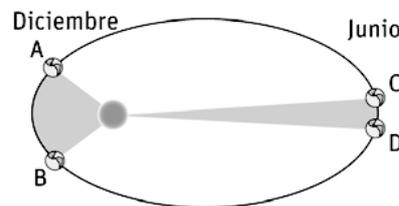
La afirmación es falsa; el cuadrado del periodo de A es ocho veces mayor es el cuadrado del periodo de B.

b) La  $k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(7,1664 \text{ día})(86400 \text{ s día}^{-1})^2}{(1,07 \cdot 10^7 \text{ m})^3} = 3,13 \cdot 10^{-10} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$

La constante de Kepler depende de la masa del astro central. Si se compara el valor obtenido con el de la constante de Kepler del ejercicio resuelto 1 ( $k = 2,97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$ ) se observa que son diferentes. La afirmación es cierta.

3. En diciembre la Tierra está más cerca del Sol. Usa la segunda ley de Kepler para demostrar que, en ese mes, la Tierra se mueve más rápido en su órbita que en junio, cuando la Tierra está más alejada del Sol.

La órbita de la Tierra es elíptica, como se ve en el dibujo adjunto. La Tierra, en su giro alrededor del Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales. Al ser el arco A-B mayor que el C-D, la Tierra se mueve más rápida en diciembre que en junio.



4. Con ayuda de la tercera ley de Kepler y suponiendo una órbita circular, demuestra que un planeta más cercano al Sol tiene mayor velocidad de traslación sobre su órbita que un planeta más alejado.

En una órbita circular se cumple que  $2\pi r = vT$ , ya que al ser el tiempo el periodo, el planeta habrá dado una vuelta completa. Aplicando la tercera ley de Kepler ( $k = \frac{T^2}{r^3}$ ), y sustituyendo el valor del periodo obtenido en la

primera ecuación, se obtiene la expresión  $k = \frac{4\pi^2}{v^2 r}$  donde se observa que el producto de  $v^2 r$  es constante, por lo tanto, a menor distancia, mayor velocidad de traslación.

5. La estación espacial internacional (EEI) tiene una órbita casi circular, con una distancia media a la superficie terrestre de 415 km y una masa de unas 450 t. Determina el valor de su momento angular respecto al centro de la Tierra. Dato. Radio medio de la Tierra:  $6,37 \cdot 10^6$  m.

El módulo del momento angular es  $|\vec{L}| = r m v$ , siendo  $r$  el radio de la órbita. En este caso:

$$r = (6,37 \cdot 10^6 + 4,15 \cdot 10^5) \text{ m} = 6,79 \cdot 10^6 \text{ m}$$

En esta actividad la velocidad de la EEI debería ser un dato. Al describir una órbita circular existe una fuerza centrípeta que es la fuerza gravitatoria, lo que permite calcular la velocidad:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2})(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{6,79 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7,66 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$|\vec{L}| = r m v = (6,79 \cdot 10^6 \text{ m})(450 \cdot 10^3 \text{ kg})(7,66 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}) = 2,34 \cdot 10^{16} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$$

6. Se sabe que la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos separados 1,50 m es  $3,16 \cdot 10^{-7}$  N. Sabiendo que uno de ellos tiene una masa de 71,5 kg, calcula la masa del otro cuerpo.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow m_2 = \frac{F r^2}{G m_1} = \frac{(3,16 \cdot 10^{-7} \text{ N})(1,5 \text{ m})^2}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2})(71,5 \text{ kg})} = 149 \text{ kg}$$

7. Si un coche golpea por alcance a otro cuando ambos se mueven por una superficie horizontal, razona si el de atrás puede alegar en su descargo que la responsable del accidente ha sido la gravitación universal.

No. El hecho de que el valor de  $G$  sea tan pequeño hace que la fuerza gravitatoria que se ejercen ambos coches sea muy pequeña. Que un coche alcance al otro por detrás, está relacionado con la velocidad relativa entre ellos.

8. Calcula la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra:

a) Sobre un persona de 75,0 kg situada en la superficie de la Tierra.

b) Sobre un satélite artificial de 75,0 kg situado a 250 km sobre la superficie terrestre.

Datos:  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$  kg;  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m.

$$\text{a) } F = G \frac{M_T m}{R_T^2} = (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) \cdot \frac{(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(75,0 \text{ kg})}{(6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 737 \text{ N}$$

$$\text{b) } F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) \cdot \frac{(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(75,0 \text{ kg})}{(6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 2,5 \cdot 10^5 \text{ m})^2} = 683 \text{ N}$$

9. El valor del campo producido por una masa de 110 kg en la posición de otra masa de 15 kg es de  $0,054 \text{ N kg}^{-1}$ .

a) ¿A qué distancia se encuentran ambas masas?

b) ¿Qué fuerza recibe la masa de 15 kg?

c) ¿Qué fuerza ejerce la masa de 15 kg sobre la de 110 kg?

a) El valor del campo gravitatorio producido por una masa en un punto situado a una cierta distancia de la misma es el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en dicho punto.

$$g = G \frac{m}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{GM}{g}} = \sqrt{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2})(110 \text{ kg})}{0,054 \text{ Nm}^{-1}}} = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

b) El módulo del vector  $\vec{g}$ , creado por una masa  $m$  sobre una masa  $m'$  en un punto que dista  $r$  de la masa es:

$$g = \frac{F}{m'} \Rightarrow F = (15 \text{ kg})(0,054 \text{ Nm}^{-1}) = 0,81 \text{ N}$$

- c) Según el tercer principio de la dinámica, la fuerza que un cuerpo B ejerce sobre otro A (fuerza de acción) tendrá el mismo módulo, la misma dirección y sentido contrario que la fuerza que ejerce A sobre B (fuerza de reacción).

10. **Razona donde será mayor el peso de un destornillador, ¿en la superficie de la Tierra o en la Estación Espacial Internacional? ¿Y su masa?**

El peso será mayor en el punto en el que el módulo de la intensidad del campo gravitatorio sea mayor. Como éste valor es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, será mayor en la superficie de la Tierra (la superficie de la Tierra se encuentra más cerca del centro de la misma, que la Estación Espacial).

La masa es la misma. La masa es una característica inherente a todo cuerpo material, con independencia de que exista o no un campo gravitatorio.

11. **Razona sobre la veracidad o falsedad de estas afirmaciones:**

a) **La masa de un objeto depende de su posición.**

b) **El peso de un objeto depende de su posición.**

a) Falsa. La masa es una característica inherente al cuerpo.

b) Verdadera. El peso depende del módulo de la intensidad del campo gravitatorio y éste es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto al centro de la Tierra.

12. **El ascensor de un rascacielos tarda 3,5 s en alcanzar la velocidad de 10 m s<sup>-1</sup>.**

a) **Calcula el peso aparente de una persona de 60 kg, cuando está empezando a subir (con un *mrúa*).**

b) **¿Cuál es su peso aparente cuando la velocidad es constante?**

a) Se calcula la aceleración del ascensor, que posee un *mrúa*:

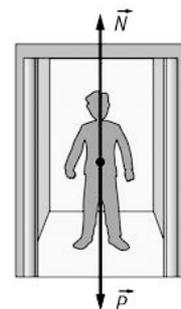
$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{(10 \text{ m s}^{-1})}{(3,5 \text{ s})} = 2,9 \text{ m s}^{-2}$$

Aplicando es segundo principio de la dinámica:

$$N - mg = ma \Rightarrow N = m(g + a) = 60(9,8 + 2,9) = 7,6 \cdot 10^2 \text{ N}$$

b) Al ser la velocidad constante, el ascensor no tiene aceleración:

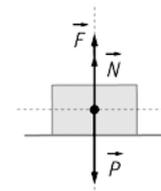
$$N - mg = 0 \Rightarrow N = (60 \text{ kg})(9,8 \text{ m s}^{-2}) = 5,9 \cdot 10^2 \text{ N}$$



13. **Una caja de 10,0 kg de masa está situada sobre una superficie horizontal. Una persona ata una cuerda y tira hacia arriba con una fuerza de 45,0 N. Calcula la normal.**

Al estar el cuerpo en equilibrio:  $F + N = P$

$$F + N = mg \Rightarrow N = (10,0 \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2}) - (45,0 \text{ N}) = 53,1 \text{ N}$$



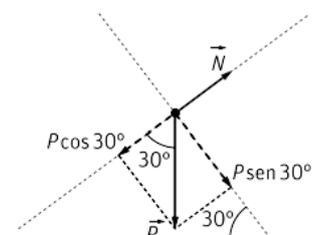
14. **Una ardilla de 250 g se encuentra apoyada en una rama que forma 30° con la horizontal. Calcula su peso y la fuerza normal sobre la ardilla.**

El peso de la ardilla es:

$$P = mg = (0,250 \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2}) = 2,5 \text{ N}$$

En este caso la normal coincide con una de las componentes del peso:

$$N = mg \cos \alpha = (0,250 \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2}) \cos 30^\circ = 2,1 \text{ N}$$

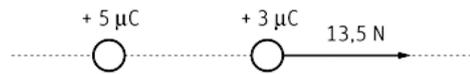


15. Dos cargas eléctricas,  $q$  y  $2q$ , situadas en el vacío a una distancia de 3 m, se repelen con una fuerza de  $2 \cdot 10^{-9}$  N. Calcula el valor de las cargas.

$$\text{Por la ley de Coulomb: } F = k \frac{qq'}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = r \sqrt{\frac{F}{2k}} = (3 \text{ m}) \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^{-9} \text{ N})}{2 \cdot (9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2})}} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

La segunda carga, como es el doble de esta, tendrá un valor de  $2 \cdot 10^{-9}$  C y del mismo signo; ya que se repelen.

16. ¿A qué distancia se encuentran dos cargas de  $+5,0 \mu\text{C}$  y  $+3,0 \mu\text{C}$ , si la fuerza que ejerce la primera sobre la segunda es de 13,5 N? Realiza un esquema representativo.



Por la ley de Coulomb:

$$F = k \frac{qq'}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{kqq'}{F}} = \sqrt{\frac{(9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2})(5,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})(3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{13,5 \text{ N}}} = 0,10 \text{ m}$$

17. Para comenzar a mover una caja de 6,0 kg por un suelo horizontal es necesario realizar una fuerza de 42 N.
- Calcula el coeficiente estático de rozamiento.
  - Si la fuerza anterior continua aplicándose sobre la caja, esta adquiere una aceleración de  $0,67 \text{ m s}^{-2}$ . ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético?

a) La fuerza aplicada coincide con la fuerza de rozamiento estático máxima,  $f_r = F$ :

$$f_r = \mu_e mg \Rightarrow \mu_e = \frac{f_r}{mg} = \frac{(42 \text{ N})}{(6,0 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2})} = 0,71$$

b) Si la caja comienza a moverse actúa el coeficiente de rozamiento cinético. Aplicando el segundo principio:

$$F - f_r = ma \Rightarrow F - \mu_c mg = ma \Rightarrow \mu_c = \frac{F - ma}{mg} = \frac{(42 \text{ N}) - [(6,0 \text{ kg})(0,67 \text{ ms}^{-2})]}{(6,0 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2})} = 0,65$$

18. Si, para una superficie, el coeficiente de rozamiento estático es 1,2 veces el coeficiente de rozamiento cinético, razona sobre la veracidad o falsedad de estas afirmaciones:

- La fuerza de rozamiento estática es siempre 1,2 veces la cinética.
  - El máximo de la fuerza de rozamiento estática es 1,2 veces la fuerza de rozamiento cinética.
- a) Falsa. La fuerza de rozamiento estático solo actúa cuando las dos superficies de contacto están en reposo, una respecto a la otra, y existe una fuerza sobre uno de los objetos a mover. La fuerza de rozamiento estático va aumentando conforme aumenta la fuerza aplicada, hasta que llega a un valor máximo, en ese caso si se cumpliría la premisa del enunciado:  $f_{r,e} \leq \mu_e N$
- b) Verdadera, según se explica en el apartado a).

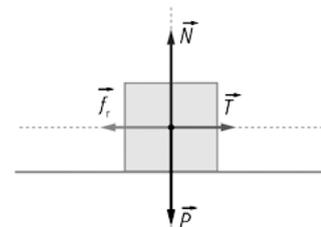
19. Una caja de 33 kg esta en reposo sobre un plano horizontal. Calcula la fuerza paralela al plano necesaria para que la caja comience a deslizarse si el coeficiente de rozamiento estático es  $\mu_e = 0,30$ . ¿Qué aceleración tendrá la caja cuando empiece a moverse si  $\mu_c = 0,25$ ?

Para que la caja comience a deslizar la fuerza aplicada debe ser igual a la fuerza de rozamiento estática máxima:

$$F = f_r = \mu_e mg = 0,30 \cdot (33 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2}) = 97 \text{ N}$$

Aplicando el 2.º principio de la dinámica cuando comienza a moverse:

$$F - f_r = ma \Rightarrow a = \frac{F - \mu_c mg}{m} = \frac{(97 \text{ N}) - 0,25 \cdot (33 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2})}{(33 \text{ kg})} = 0,49 \text{ ms}^{-2}$$



20. Si la caja del ejercicio anterior no recibe ninguna fuerza paralela al plano horizontal, ¿existe fuerza de rozamiento?

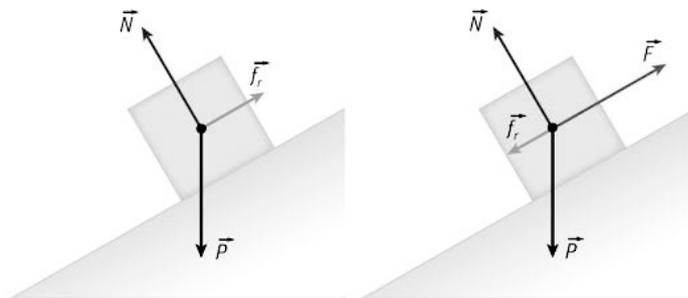
No. Para que exista fuerza de rozamiento debe existir una fuerza aplicada sobre el objeto, aunque, no es necesario que la fuerza aplicada mueva el objeto.

21. Aunque a veces se dice que la fuerza de rozamiento "se opone al movimiento", indica alguna situación donde la fuerza de rozamiento permita el movimiento de objetos.

Cuando caminamos o corremos, realizamos una fuerza sobre el suelo y es la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo sobre nosotros la que hace que nos movamos hacia delante.

Si no existiera rozamiento entre las ruedas de un coche y la carretera, el coche no tendría adherencia y patinaría (piensa lo que ocurre cuando un coche pasa por una mancha de aceite).

22. Asocia cada enunciado a uno de los diagramas de fuerzas.



- a) Un operario sube un coche a velocidad constante, encima de una grúa por un plano inclinado con ayuda de un mecanismo que tira mediante un cable.  
 b) Una empresa de mudanzas baja una caja mediante una cinta transportadora inclinada con velocidad constante.

El segundo diagrama corresponde al enunciado a), ya que existe una fuerza,  $\vec{F}$ , dirigida hacia arriba, que corresponde a la que ejerce el mecanismo mediante el cable.

El primer diagrama corresponde al enunciado b); ya que la caja desliza por su propio peso.

23. En cada una de las situaciones siguientes hay una fuerza que no está correctamente aplicada sobre el objeto que se indica. Averigua que fuerza es y aplícala donde corresponda.



- a) Las fuerzas que actúan sobre un niño montado en un trineo, que es arrastrado por su madre.  
 b) Un minero empujando hacia arriba una vagoneta por una vía ligeramente inclinada.

a) La Fuerza  $\vec{F}$  debe estar aplicada sobre el trineo y no sobre el chico.

b) El peso debe ser perpendicular a la base del plano inclinado y no perpendicular a la superficie de apoyo.

24. Razona sobre la veracidad o falsedad de estas afirmaciones:

- a) Si un cuerpo que se desliza por una superficie plana llega a una zona donde el coeficiente de rozamiento se reduce a la mitad, el valor absoluto de su aceleración también se reducirá a la mitad.
- b) Si un cuerpo de masa  $m$  se desliza por un plano horizontal con rozamiento y se coloca sobre él otra masa igual, la fuerza de rozamiento será el doble.

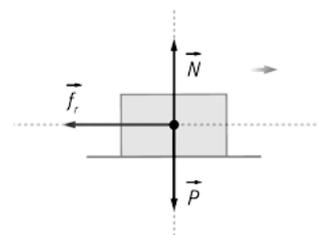
a) Con ayuda del diagrama de fuerzas y aplicando el 2.º principio de la dinámica:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = mg \text{ (ya que está en equilibrio en el eje Y)}$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow -f_r = ma \Rightarrow a = -\frac{f_r}{m}$$

Como  $|\vec{f}_r| = \mu mg$ , si el coeficiente se reduce a la mitad, la fuerza de rozamiento también lo hará, por lo tanto, el valor absoluto de la aceleración también se reducirá a la mitad.

b) Sabemos que  $f_r = \mu N = \mu mg$ . Como se observa en la expresión anterior la fuerza de rozamiento es proporcional a la masa, y si esta se duplica, la fuerza también lo hará.



25. Se tira de un objeto de 11 kg de masa, situado sobre un plano horizontal, con una fuerza  $F$  desconocida, que le produce una aceleración de  $1,0 \text{ m s}^{-2}$ . Posteriormente se tira con una fuerza de  $2F$  y la aceleración pasa a ser de  $8,0 \text{ m s}^{-2}$ . Calcula el valor de la fuerza aplicada,  $F$ , y el valor del coeficiente de rozamiento, sabiendo que la superficie es horizontal.

Con ayuda del diagrama de fuerzas, aplicando el 2.º principio de la dinámica en los dos ejes, y sabiendo que el cuerpo está en equilibrio en el eje Y:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - \mu mg = ma \Rightarrow F - \mu mg = ma$$

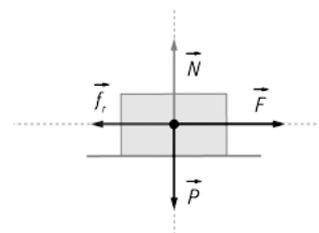
En el primer caso  $F - \mu(11\text{kg})(9,81\text{ms}^{-2}) = (11\text{kg})(1,0\text{ms}^{-2})$

Cuando la fuerza es el doble:  $2F - \mu \cdot (11\text{kg})(9,81\text{ms}^{-2}) = (11\text{kg})(8,0\text{ms}^{-2})$

Si se restan las dos ecuaciones:  $F = (11\text{kg})[(8,0\text{ms}^{-2}) - (1,0\text{ms}^{-2})] = 77 \text{ N}$

Sustituyendo  $F$  en la primera ecuación se obtiene el coeficiente de rozamiento:

$$(77 \text{ N}) = \mu \cdot (11\text{kg})(9,81\text{ms}^{-2}) = (11\text{kg})(1,0\text{ms}^{-2}) \Rightarrow \mu = 0,61$$



26. Dos objetos de 25 kg y 35 kg de masa están situados en la parte superior de un plano inclinado, sin rozamiento, de 7 m de largo y  $30^\circ$  de inclinación. ¿Cuál llega antes al pie del plano si se sueltan a la vez? ¿Cuánto tiempo tardará?

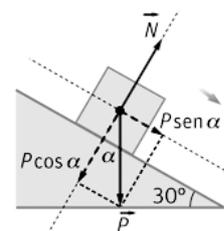
Del diagrama de fuerzas, se observa que la única fuerza que actúa en la dirección del movimiento es la componente del peso multiplicada por el seno:

$$mg \text{ sen } \alpha = ma \Rightarrow a = g \text{ sen } \alpha$$

Como la aceleración es independiente de la masa, llegan las dos masas a la vez.

El cuerpo tiene un *mrva* con velocidad inicial nula. A través de la ecuación de la posición se puede calcular el tiempo:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \Delta x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (7,0 \text{ m})}{(9,81 \text{ ms}^{-2}) \text{ sen } 30^\circ}} = 1,7 \text{ s}$$



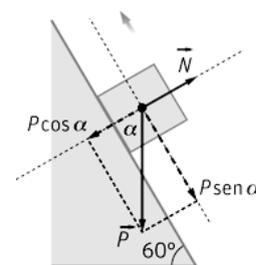
27. Se lanza hacia arriba por un plano inclinado de  $60^\circ$  de inclinación, un objeto con una velocidad de  $9,0 \text{ m s}^{-1}$ . Calcula la distancia que recorrerá sobre el plano si no existe rozamiento.

Aplicando el 2.º principio de la dinámica en la dirección del movimiento:

$$-mg \operatorname{sen} \alpha = ma \Rightarrow a = -g \operatorname{sen} \alpha = (9,81 \text{ m s}^{-2}) \operatorname{sen} 60^\circ = -8,5 \text{ m s}^{-2}$$

Como el cuerpo posee un *mrva*, y en su punto más alto su  $v_f$  es nula:

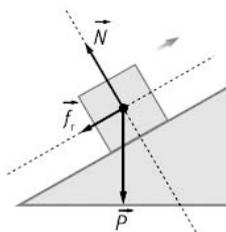
$$v_f^2 - v_0^2 = 2a \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} = \frac{-(9,0 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot (-8,5 \text{ m s}^{-2})} = 4,8 \text{ m}$$



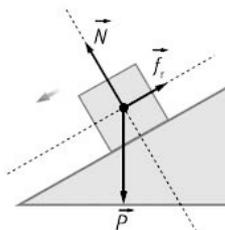
28. Dibuja un diagrama de fuerzas que represente las situaciones que se indican a continuación.

- a) Un chico al salir de clase lanza una mochila hacia arriba por un tobogán que tiene rozamiento.  
 b) Un ciclista está descendiendo un puerto sin dar pedales en una zona que no hay curvas. Existe rozamiento entre las ruedas y el pavimento.

a)



b)



29. Con la ayuda de una fuerza de  $14 \text{ N}$  se sube un objeto de  $2,0 \text{ kg}$  de masa por un plano inclinado de  $25^\circ$ . Calcula la aceleración con la que sube el objeto:

- a) Si no hay rozamiento entre el plano y el objeto.

- b) Si existe rozamiento,  $\mu_c = 0,17$ .

- a) Se dibuja el diagrama de fuerzas.

Aplicando el segundo principio de la dinámica en el eje X:

$$F - mg \operatorname{sen} \alpha = ma \Rightarrow$$

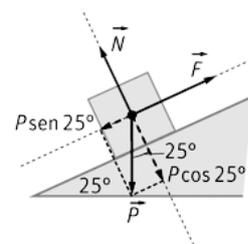
$$a = \frac{F - mg \operatorname{sen} \alpha}{m} = \frac{(14 \text{ N}) - (2,0 \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2}) \operatorname{sen} 25^\circ}{(2,0 \text{ kg})} = 2,9 \text{ m s}^{-2}$$

- b) Aplicando el segundo principio en los dos ejes:

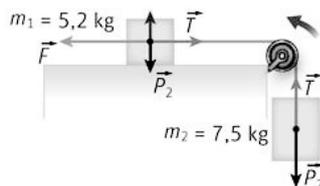
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - f_r = ma \Rightarrow F - mg \operatorname{sen} \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow$$

$$a = \frac{F - mg(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)}{m} = \frac{(14 \text{ N}) - (2,0 \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2})(\operatorname{sen} 25^\circ + 0,17 \cos 25^\circ)}{(2,0 \text{ kg})} = 1,3 \text{ m s}^{-2}$$



30. En la figura, ¿qué fuerza horizontal sobre el primer cuerpo hace que, partiendo del reposo, avance  $5,0 \text{ m}$  en  $3,5 \text{ s}$ ? ¿Qué tensión tendrá la cuerda?



Se determina la aceleración

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot (5,0 \text{ m})}{(3,5 \text{ s})^2} = 0,82 \text{ ms}^{-2}$$

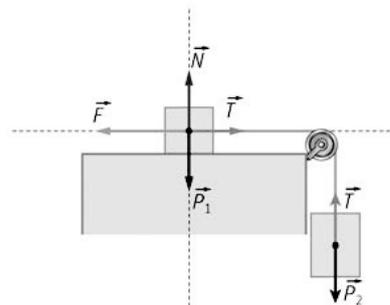
Se aplica la segunda ley de Newton en cada masa:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &\Rightarrow F - T = m_1 a \\ m_2 &\Rightarrow F - m_2 g = m_2 a \end{aligned} \right\}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$F - m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow F = (12,7 \text{ kg})(0,82 \text{ ms}^{-2}) + (7,5 \text{ kg})(9,8 \text{ ms}^{-2}) = 84 \text{ N}$$

$$\text{Sustituyendo en (1): } (84 \text{ N}) - T = (5,2 \text{ kg})(0,82 \text{ ms}^{-2}) \Rightarrow T = 80 \text{ N}$$



31. Dos cuerpos de 1,0 kg y 3,0 kg descansan sobre un plano horizontal y uno inclinado 30°, respectivamente, unidos por una cuerda. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento cinético para ambos planos vale 0,10, halla la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Se realiza un diagrama con todas las fuerzas que actúan sobre cada masa.

Se asigna un sentido de movimiento y se aplican la 2.ª ley de Newton en cada masa.

$$m_1 : \left\{ \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_1 = m_1 g \\ \sum F_x = m_1 a &\Rightarrow T - f_r = m_1 a \Rightarrow T - \mu m_1 g = m_1 a \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow T = m_1 (a + \mu g) \quad (1)$$

$$m_2 : \left\{ \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_2 = m_2 g \cos \alpha \\ \sum F_x = m_2 a &\Rightarrow m_2 g \sin \alpha - f_r - T = m_2 a \end{aligned} \right.$$

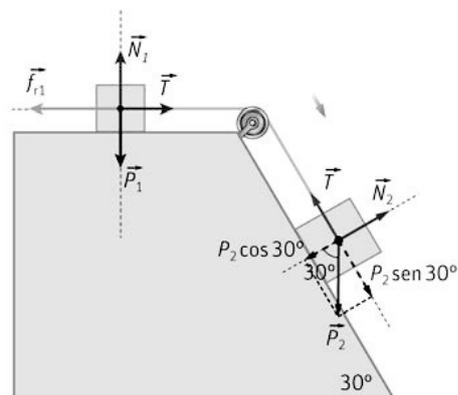
$$\Rightarrow m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), y despejando la aceleración; se obtiene:

$$a = \frac{m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha - \mu m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{(9,8 \text{ ms}^{-2}) [(3,0 \text{ kg}) \sin 30^\circ - 0,1 \cdot (1,0 + 3,0 \cdot \cos 30^\circ) \text{ kg}]}{(1,0 + 3,0) \text{ kg}} = 2,8 \text{ ms}^{-2}$$

Para calcular la tensión se sustituye en (1):

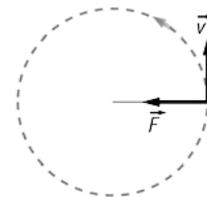
$$T - 0,1 \cdot (1,0 \text{ kg})(9,8 \text{ ms}^{-2}) = (1,0 \text{ kg})(2,8 \text{ ms}^{-2}) \Rightarrow T = 3,8 \text{ N}$$



32. Un grupo de patinadores se cogen de las manos y forman una línea recta. El grupo trata de patinar para que la línea gire alrededor del patinador situado en un extremo, que actúa como pivote. El patinador más alejado del pivote tiene una masa de 75,0 kg y se encuentra a 5,80 m del pivote y patina a una velocidad de 4,50 m s<sup>-1</sup>. Calcula la fuerza centrípeta que actúa sobre él.

Como el movimiento es circular y uniforme, el patinador posee aceleración centrípeta, cuyo valor es:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = (75,0 \text{ kg}) \cdot \frac{(4,5 \text{ ms}^{-1})^2}{(5,80 \text{ m})} = 262 \text{ N}$$

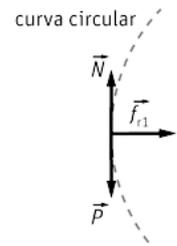


33. Un automóvil de 1250 kg entra en una curva plana de radio 34,0 m, con una determinada velocidad. Calcula la velocidad máxima con la que puede tomar la curva si el coeficiente de rozamiento estático en seco vale 0,450.

La fuerza centrípeta es en este caso la fuerza de rozamiento estático entre los neumáticos y el suelo. Aplicando la 2.ª ley de Newton en cada eje:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\Sigma F_x = ma_c \Rightarrow f_r = ma_c \Rightarrow \mu_e mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_e g r} = \sqrt{0,45 \cdot (9,8 \text{ ms}^{-2})(34 \text{ m})} = 12,3 \text{ ms}^{-1}$$



34. Un satélite artificial de 120 kg de masa gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio  $6,87 \cdot 10^6$  m. Conocidas las constantes de gravitación universal y de la masa de la Tierra, calcula la fuerza centrípeta que recibe el satélite y su velocidad.

La fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria que ejerce el planeta sobre el satélite:

$$F = G \frac{M_T m}{R_T^2} = (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) \cdot \frac{(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(120 \text{ kg})}{(6,87 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 1,01 \cdot 10^3 \text{ N}$$

La velocidad de giro se obtiene expresando esta fuerza como centrípeta y despejando la velocidad de la ecuación:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_c r}{m}} = \sqrt{\frac{(1,01 \cdot 10^3 \text{ N})(6,87 \cdot 10^6 \text{ m})}{(120 \text{ kg})}} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

35. Un muelle de 25 cm de longitud tiene una constante elástica de  $5,0 \text{ N m}^{-1}$ .

a) ¿Qué fuerza duplicará su longitud inicial?

b) ¿Qué alargamiento produce una fuerza de 0,80 N?

a) Sabemos que la fuerza aplicada es proporcional al alargamiento producido. Para duplicar su longitud, el muelle debe alargarse 25 cm. Así:  $F = k \Delta L = (5,0 \text{ Nm}^{-1})(0,25 \text{ m}) = 1,3 \text{ N}$

b)  $\Delta L = \frac{F}{k} = \frac{(0,80 \text{ N})}{(5,0 \text{ Nm}^{-1})} = 0,16 \text{ m}$

36. Un muelle ejerce una fuerza de 10,0 N si se estira 1,00 cm desde su posición de equilibrio. ¿Cuánto aumentará la fuerza del muelle si este se estira de la posición 3,00 cm a la posición 4,00 cm?

El alargamiento es  $(4,00 - 3,00) \text{ cm} = 1,00 \text{ cm}$ , por lo tanto, como dice el enunciado, cuando se estira 1,00 cm, el muelle ejerce una fuerza de 10,0 N.

37. Una persona, al subirse sobre una balanza de resorte, pesa 670 N; el muelle se comprime 0,78 cm.

a) ¿Cuál es la constante del muelle?

b) ¿Cuánto pesa otra persona que comprime el muelle 0,32 cm?

a) Con ayuda de la ley de Hooke:

$$F = k \Delta x \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{(670 \text{ N})}{(0,78 \text{ cm})} = 8,6 \cdot 10^2 \text{ Ncm}^{-1}$$

b)  $F = k \Delta x = (8,6 \cdot 10^2 \text{ Ncm}^{-1})(0,32 \text{ cm}) = 275 \text{ N}$

38. En una feria hay un juego que consiste en golpear sobre un muelle acolchado. Una persona de 87,0 kg puede golpear con una fuerza que es igual a la mitad de su peso; si la constante elástica del muelle vale  $k = 2,70 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$ , calcula cuánto se comprimirá el muelle.

El peso de la persona es:  $P = mg = (87 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2}) = 853 \text{ N}$

La fuerza que ejercerá es la mitad del peso; esto es, 427 N.

Con ayuda de la ley de Hooke:

$$F = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{(427 \text{ N})}{(2,70 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1})} = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

## Interacciones, gravitatoria y eléctrica

39. Responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué fuerzas actúan sobre el transbordador espacial que gira en órbita en torno a la Tierra?
- Indica donde se aplica la reacción a estas fuerzas.
- ¿Tienen el mismo significado fuerza gravitatoria que intensidad del campo gravitatorio? Razona tu respuesta.
- Indica de que factores depende el valor de la gravedad en la superficie de la Tierra y en qué unidad se expresa.
  - Actúa la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el transbordador.
  - Se aplica en el centro de la Tierra.
  - No. La intensidad del campo gravitatorio en un punto es la fuerza gravitatoria por unidad de masa situada en dicho punto.
  - Por definición:  $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$ . Es directamente proporcional a la masa de la Tierra e inversamente proporcional al cuadrado del radio terrestre. Sus unidades son  $\text{m s}^{-2}$  o  $\text{N kg}^{-1}$ .

40. Se sabe que el valor de la gravedad en la superficie de Júpiter es  $25,1 \text{ m s}^{-2}$ . Una sonda espacial tiene un peso en la Tierra de 725 N. Determina la masa y el peso de la sonda espacial si esta pudiera llegar a la superficie de Júpiter. Dato:  $g_T = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

El valor de la masa no varía al ir de un planeta al otro.

$$\text{Como: } P = mg \Rightarrow m = \frac{(725 \text{ N})}{(9,81 \text{ ms}^{-2})} = 73,9 \text{ kg}$$

$$\text{El peso en Júpiter: } P_J = m g_J = (73,9 \text{ kg})(25,1 \text{ ms}^{-2}) = 1,85 \cdot 10^3 \text{ N}$$

41. Si el radio medio de la órbita de la Luna en torno a la Tierra es  $3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$ , aproximadamente, calcula:

- La fuerza gravitatoria de la Tierra sobre la Luna.
  - La velocidad de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.
- Datos:  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

- a) La fuerza gravitatoria es:

$$F = G \frac{M_T m_L}{(d_{T-L})^2} = (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) \cdot \frac{(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(75,3 \cdot 10^{22} \text{ kg})}{(384 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = 1,98 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

- b) Se aplica el segundo principio de la dinámica:

$$F = m a_c \Rightarrow G \frac{M_T m_L}{(d_{T-L})^2} = m_L \frac{v^2}{d_{T-L}} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_T}{d_{T-L}}} = 1,02 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

42. La Tierra tarda en dar una vuelta alrededor del Sol un tiempo de  $3,156 \cdot 10^7$  s. Sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es  $1,496 \cdot 10^{11}$  m, calcula la masa del Sol.

Suponiendo la órbita circular, si el tiempo es el periodo, la Tierra ha dado una vuelta completa. Se cumple, por tanto, que  $2\pi r = vT \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$ . Aplicando la 2.ª ley de Newton:

$$F = ma_c \Rightarrow G \frac{M_s m_T}{r^2} = m_T \frac{v^2}{r} \Rightarrow M_s = \frac{v^2 r}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

43. Marte tiene dos satélites, Deimos y Fobos. Deimos es el más pequeño de los dos, tiene un radio de 6,3 km y una masa de  $2,24 \cdot 10^{15}$  kg.

a) Calcula el valor de la gravedad en la superficie de Deimos.

b) ¿Cuál sería la reacción normal sobre un objeto apoyado en Deimos si la reacción normal sobre el mismo objeto apoyado en la Tierra es 98,1 N?

a)  $g_D = G \frac{M_D}{r_D^2} = (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) \frac{(2,24 \cdot 10^{15} \text{ kg})}{(6,3 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = 3,76 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$

b) En la Tierra  $N = mg \Rightarrow 9,81 \text{ N} = m(9,81 \text{ ms}^{-2}) \Rightarrow m = 10,0 \text{ kg}$

$$N_D = mg_D \Rightarrow N_D = (10,0 \text{ kg})(3,76 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}) = 3,76 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

44. La aceleración de caída libre en la superficie de un planeta es  $22 \text{ m s}^{-2}$ . Si el radio y la masa de un segundo planeta son el doble que en el primer planeta, calcula el valor de la gravedad en su superficie.

$$g_2 = G \frac{m_2}{r_2^2} = G \frac{2m_1}{(2r_1)^2} = \frac{1}{2} g_1 = 11 \text{ ms}^{-2}$$

45. Razona sobre la veracidad o falsedad de las afirmaciones:

a) Un cuerpo cualquiera puede adquirir una carga negativa de  $4 \cdot 10^{-19}$  C.

b) Si dos cargas eléctricas iguales se alejan, la fuerza eléctrica entre ellas disminuye.

a) Un cuerpo adquiere carga negativa cuando gana electrones. La carga de un electrón es  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Así:

$$n = (-4 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \frac{1 e^-}{(-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = 2,5 \text{ electrones}$$

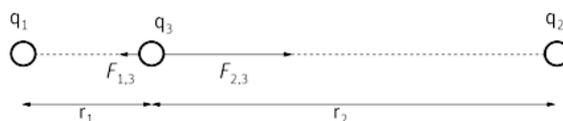
La afirmación es falsa; ya que el electrón no se puede dividir.

b) Verdadera. La ley de Coulomb nos indica que la fuerza que se ejercen dos cargas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

46. Dos cargas de  $+10 \mu\text{C}$  están separadas 2,0 cm. Calcula la fuerza neta que estas cargas ejercen sobre otra carga de  $-1,0 \mu\text{C}$ , situada entre las dos cargas y a 0,50 cm de una de ellas.



Del diagrama de la figura se determinan las dos fuerzas.



Como la  $\vec{F}_{1,3}$  va hacia la izquierda será negativa; mientras que la  $\vec{F}_{2,3}$  será positiva.

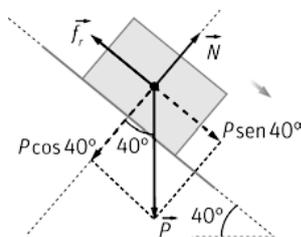
$$\vec{F}_{1,3} = k \frac{q q'}{r^2} \vec{i} = (9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}) \cdot \frac{(10,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})(10^{-6} \text{ C})}{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \vec{i} = (3,6 \cdot 10^3 \vec{i}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{2,3} = -(9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}) \cdot \frac{(10,0 \cdot 10^{-6} \text{ C})(10^{-6} \text{ C})}{1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \vec{i} = (-400 \vec{i}) \text{ N}$$

$$\vec{F} = (3,6 \cdot 10^3 \vec{i} - 400 \vec{i}) \text{ N} = (3,2 \cdot 10^3 \vec{i}) \text{ N}$$

## Movimiento por la acción de fuerzas constantes

47. Un camión tiene que descargar una viga de 150 kg. Para ello comienza a levantar su caja poco a poco. Cuando la caja forma un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal, la viga comienza a deslizarse. Determina el valor del coeficiente de rozamiento estático entre la viga y la caja.



Comenzará a moverse cuando la componente del peso en la dirección del movimiento coincida con la fuerza de rozamiento estática máxima.

Aplicando la segunda ley de Newton a ambos ejes, justo antes de moverse:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P \sin \alpha - f_r = 0 \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow \mu = \tan \alpha = \tan 40^\circ = 0,84$$

A partir de este ángulo la viga deja de estar en equilibrio y descenderá.

48. Una persona empuja un cortacésped de 12,5 kg de masa con una fuerza de 85,5 N, tal como se indica en la figura. El cortacésped se mueve con velocidad constante. Calcula:

a) La fuerza de rozamiento y la fuerza normal.

b) La fuerza con la que tendría que empujarse el cortacésped para que, partiendo del reposo, adquiriera una velocidad de  $1,25 \text{ m s}^{-1}$  en 1,32 s, sabiendo que la fuerza de rozamiento es la misma que la calculada en el apartado a.



a) Aplicando el segundo principio de la dinámica en ambos ejes y teniendo en cuenta que la velocidad es constante; lo que significa que la aceleración es nula y, por lo tanto, la fuerza total también.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F \sin 45^\circ - f_r = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P - F \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

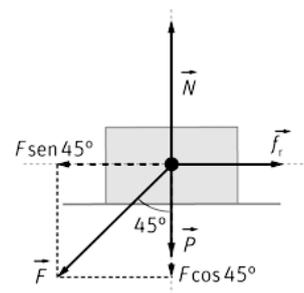
$$\text{De (1): } f_r = F \sin 45^\circ = (85,5 \text{ N}) \sin 45^\circ = 60,5 \text{ N}$$

$$\text{De (2): } N = mg + F \cos 45^\circ = (12,5 \text{ kg})(9,81 \text{ m s}^{-2}) + (85,5 \text{ N}) \cos 45^\circ = 183 \text{ N}$$

b) El movimiento es *mrva*, así:  $v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{(1,25 \text{ m s}^{-1})}{(1,32 \text{ s})} = 0,947 \text{ m s}^{-2}$

Con ayuda de la segunda ley de Newton:

$$F \sin 45^\circ - f_r = ma \Rightarrow F = \frac{f_r + ma}{\sin 45^\circ} = \frac{(60,4 \text{ N}) + (12,5 \text{ kg})(0,947 \text{ m s}^{-2})}{0,707} = 102 \text{ N}$$



49. Se lanza un objeto, con una velocidad inicial hacia arriba, por un plano inclinado. Analiza la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) Si no hay rozamiento en el plano inclinado, el tiempo de ascenso es igual al de descenso.
  - b) Si en el plano inclinado no hay rozamiento, la velocidad en la base del plano inclinado es la misma cuando sube que cuando baja.
  - c) Si hay rozamiento en el plano inclinado, el tiempo de ascenso es igual al de descenso.
  - d) Si hay rozamiento, dependerá de los valores de los coeficientes de rozamiento estático y dinámico que el cuerpo pueda o no bajar.
- a) Verdadera. En ambos casos la única fuerza que actúa en la dirección del movimiento es la componente del peso:  $m g \sin \alpha$ , aplicando la segunda ley de Newton.

Quando sube:  $-m g \sin \alpha = m a \Rightarrow a = -g \sin \alpha$

Quando baja:  $m g \sin \alpha = m a \Rightarrow a = g \sin \alpha$

En valor absoluto las dos aceleraciones son iguales, por lo tanto, tardará el mismo tiempo en subir que en bajar, ya que el tiempo es función de la distancia recorrida y de la aceleración.

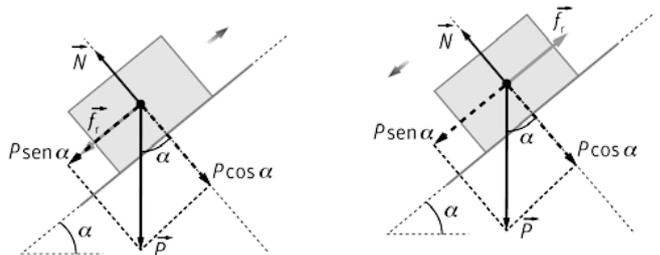
$$x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

b) Verdadera. Por lo explicado en el caso a).

c) Falsa.

Al subir:  $-P \sin \alpha - f_r = m a \Rightarrow a = \frac{-P \sin \alpha - f_r}{m}$

Al bajar:  $P \sin \alpha - f_r = m a \Rightarrow a = \frac{P \sin \alpha - f_r}{m}$



Como las aceleraciones son diferentes y la distancia es igual, los tiempos también son distintos.

d) Falso. Cuando sube, llega un momento que el objeto se para.

Para que comience a bajar la componente del peso debe ser mayor que la fuerza de rozamiento estática máxima, por lo tanto sí depende del coeficiente de rozamiento estático, pero no del dinámico.

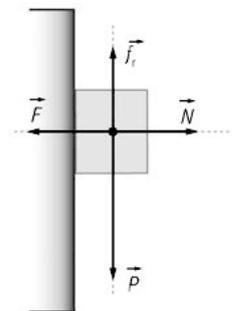
50. El profesor de Física y Química empuja un borrador de 95 g de masa contra la pizarra. Calcula la fuerza mínima con la que debe empujarlo para que no caiga, sabiendo que el coeficiente estático es  $\mu_e = 0,40$ .

Aplicando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que el borrador permanece estático:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - F = 0 \Rightarrow N = F$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_r - P = 0 \Rightarrow f_r = P \Rightarrow \mu N = m g$$

Sustituyendo  $N$ :  $\mu F = m g \Rightarrow F = \frac{m g}{\mu} = \frac{(9,5 \cdot 10^{-2} \text{ kg})(9,8 \text{ ms}^{-2})}{0,40} = 2,3 \text{ N}$



51. Un jugador de hockey sobre hielo quiere golpear el disco para que se pare justo al final de la pista, de longitud 68,0 m. Calcula la velocidad con la que ha de impulsar el disco si el coeficiente de rozamiento es 0,115.

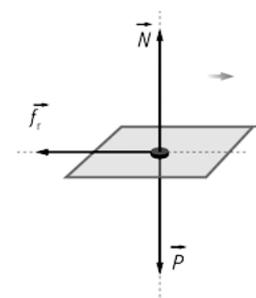
En el diagrama se observan las fuerzas que actúan sobre el disco.

Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$f_r = m a \Rightarrow a = -\mu g = -0,115 \cdot (9,81 \text{ ms}^{-2}) = -1,13 \text{ ms}^{-2}$$

Como el disco posee  $m r u a$ :

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 a \Delta x \Rightarrow v_0 = \sqrt{-2 a \Delta x} = \sqrt{-2 \cdot (-1,13 \text{ ms}^{-2}) (68,0 \text{ m})} = 12,4 \text{ ms}^{-1}$$



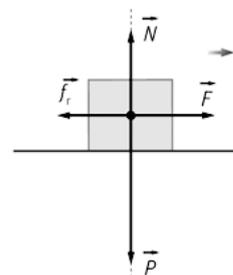
52. Una persona quiere mover con velocidad constante una caja de 9,0 kg que está apoyada sobre el piso de un vagón de tren que, a su vez, se mueve con velocidad constante. Para ello necesita hacer una fuerza de 78 N. En un momento dado, el vagón acelera y la persona tiene que aplicar una fuerza de 56 N para mover la caja con velocidad constante. Calcula el coeficiente de rozamiento y la aceleración del vagón.

Como el vagón se mueve con velocidad constante y la caja también, aplicando el segundo principio de la dinámica, se calcula el coeficiente de rozamiento.

$$F - f_r = 0 \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{F}{mg} = \frac{(78 \text{ N})}{(9,0 \text{ kg})(9,8 \text{ ms}^{-2})} = 0,88$$

Cuando el vagón acelera:

$$F - f_r = ma \Rightarrow a = \frac{F - f_r}{m} = \frac{(56 \text{ N}) - (9,0 \text{ kg})(9,8 \text{ ms}^{-2})}{9,0 \text{ kg}} = -2,4 \text{ ms}^{-2}$$



53. Un esquiador se desliza por una pendiente de 12° con velocidad constante. ¿Con qué aceleración se deslizará por una pendiente de 23°? Supón que la nieve se encuentra en el mismo estado en ambas pendientes.

Se determina el coeficiente cinético de rozamiento, para ello se aplica la segunda ley de Newton:

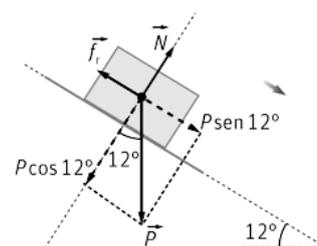
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

Como la velocidad es constante:  $\sum F_x = 0 \Rightarrow P \sin \alpha - f_r = 0$

Sustituyendo:  $\Rightarrow mg \sin \alpha = f_r = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu = \tan \alpha = \tan 12^\circ = 0,21$

En el caso de la pendiente de 23°:  $mg \sin \alpha - f_r = ma$

$$a = \frac{mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{m} = (9,8 \text{ ms}^{-2})(\sin 23^\circ - 0,21 \cos 23^\circ) = 1,9 \text{ ms}^{-2}$$



54. Un skater se lanza por una barandilla que forma 25° con la horizontal. Al llegar al final de ella la altura sobre el suelo es de 1,5 m y debe caer a 2,0 m del final de la barandilla. ¿Qué distancia debe recorrer por la barandilla para que caiga a esa distancia? (El coeficiente de rozamiento entre el monopatín y la barandilla es  $\mu = 0,08$ ).

Primero se determina la velocidad con la que llega el skater al final de la barandilla. Utilizando las ecuaciones de la cinemática y teniendo en cuenta las componentes de la velocidad.

$$\text{Eje X: } x = v_0 \cos 25^\circ t \Rightarrow v_0 = \frac{x}{\cos 25^\circ t}$$

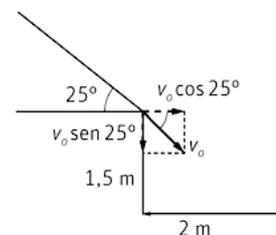
$$\text{Eje Y: } y = y_0 - v_0 \sin 25^\circ t - \frac{1}{2} g t^2$$

El tiempo de caída se determina haciendo  $y_0 = 0 \text{ m}$ .

$$y_0 = v_0 \sin 25^\circ t + \frac{1}{2} g t^2 = x \tan 25^\circ + \frac{1}{2} g t^2$$

$$1,5 \text{ m} = (2,0 \text{ m}) \cdot 0,47 + \frac{1}{2} (9,8 \text{ ms}^{-2}) t^2 \Rightarrow t = 0,34 \text{ s}$$

$$v_0 = \frac{(2,0 \text{ m})}{\cos 25^\circ (0,34 \text{ s})} = 6,5 \text{ ms}^{-1}$$



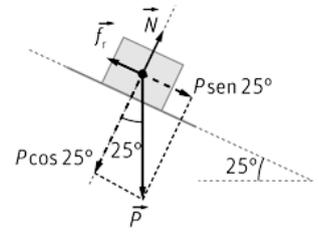
La aceleración con la que baja por la barandilla, se calcula a través del segundo principio de la dinámica. Se descomponen las fuerzas según el dibujo:

$$mg \operatorname{sen} \alpha - f_r = ma \Rightarrow mg \operatorname{sen} \alpha - \mu mg \operatorname{cos} \alpha = ma$$

$$a = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \operatorname{cos} \alpha) = (9,8 \text{ ms}^{-2})(\operatorname{sen} 25^\circ - 0,08 \operatorname{cos} 25^\circ) = 3,4 \text{ ms}^{-2}$$

Como el movimiento es un *mrva* y la velocidad con la que comienza a moverse es cero:

$$v^2 = 2a \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2}{2a} = \frac{(6,5 \text{ ms}^{-1})^2}{2 \cdot (3,4 \text{ ms}^{-2})} = 6,2 \text{ m}$$



## Movimientos de cuerpos enlazados

55. En un montaje teatral, un actor de 52,0 kg de masa tiene que caer en vertical una distancia de 4,20 m en 2,50 s. Entre bastidores hay una superficie inclinada de 52,0° que soporta un contrapeso de masa *m*, según se indica en la figura. Ayuda al director del montaje calculando la masa del contrapeso y el valor de la tensión de la cuerda.

Con ayuda de la ilustración, se aplica la segunda ley de Newton sobre cada masa:

Sobre *m'*:  $T - m'g \operatorname{sen} \alpha = m'a$

Sobre *m*:  $mg - T = ma$

Sumando ambas expresiones:  $mg - m'g \operatorname{sen} \alpha = (m' + m)a$  (1)

Para determinar la aceleración, como el actor describe un *mrva*:

$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$  (donde la velocidad inicial y la posición final son nulas):

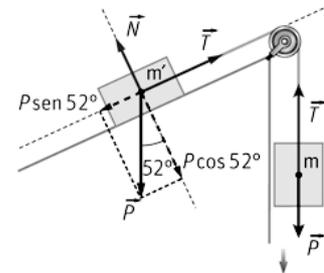
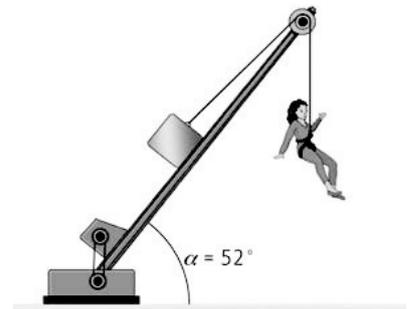
$$a = \frac{2y_0}{t^2} = \frac{2 \cdot (4,20 \text{ m})}{(3,5 \text{ s})^2} = 1,34 \text{ ms}^{-2}$$

Sustituyendo en (1):

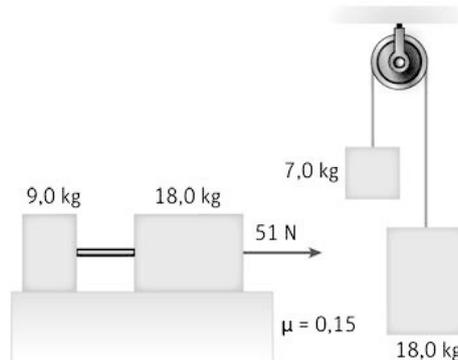
$$(52,0 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2}) - m'(9,81 \text{ ms}^{-2}) \operatorname{sen} 52^\circ = [m' + (52,0 \text{ kg})](1,34 \text{ ms}^{-2})$$

$$m' = 48,5 \text{ kg}$$

La tensión se calcula:  $mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a) = (52,0 \text{ kg})[(9,81 \text{ ms}^{-2}) - (1,34 \text{ ms}^{-2})] = 440 \text{ N}$



56. En los siguientes sistemas determina la aceleración y la tensión de la cuerda.



- a) Para calcular la aceleración se pueden considerar las dos masas como un todo. Aplicando el segundo principio de la dinámica.

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow (51\text{ N}) - f_{r1} - f_{r2} = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{(m_1 + m_2)} = \frac{(51\text{ N}) - 0,15 \cdot (9,0\text{ kg})(9,81\text{ ms}^{-2}) - 0,15 \cdot (18,0\text{ kg})(9,81\text{ ms}^{-2})}{(27\text{ kg})}$$

$$a = 0,42\text{ ms}^{-2}$$

Para calcular la tensión, se aplica la 2.ª ley de Newton, por ejemplo, sobre  $m_1$ :

$$T - f_{r1} = m_1 a \Rightarrow T = \mu m_1 g + m_1 a = (9,0\text{ kg})[0,15 \cdot (9,81\text{ ms}^{-2}) + (0,42\text{ ms}^{-2})] = 17\text{ N}$$

- b) Se aplica la segunda ley de Newton sobre cada masa.

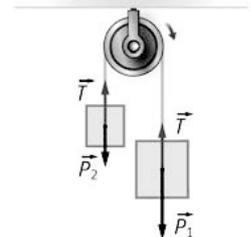
$$(1) P_1 - T = m_1 a \quad (2) T - P_2 = m_2 a$$

Sumando ambas expresiones:

$$m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = \frac{(9,81\text{ ms}^{-2})(11,0\text{ kg})}{(25\text{ kg})} = 4,3\text{ ms}^{-2}$$

De la ecuación (1) puede obtenerse la tensión:

$$T = m_1 g - m_1 a = (18,0\text{ kg})[(9,81\text{ ms}^{-2}) - (4,3\text{ ms}^{-2})] = 99\text{ N}$$



57. En muchas películas de acción el protagonista está agarrando la cuerda que sostiene una lámpara pesada (ver figura). Cuando se corta la cuerda que está atada al suelo, la lámpara cae y el protagonista sube hasta una ventana. La lámpara tiene una masa de 165 kg.



- a) Calcula la aceleración que adquiere nuestro protagonista, de 74 kg de masa, cuando corta la cuerda.  
b) Determina la tensión de la cuerda mientras sube.  
c) Si la ventana está a 5,2 m del suelo, ¿cuánto tiempo tarda en subir?

- a) Se aplica la segunda ley de Newton a la lámpara y al protagonista:

$$P_1 - T = m_1 a$$

$$T - P_2 = m_2 a$$

Sumando ambas ecuaciones:

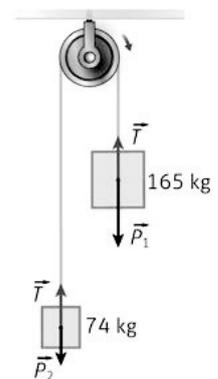
$$P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)} = \frac{(91\text{ kg})(9,81\text{ ms}^{-2})}{(239\text{ kg})} = 3,7\text{ ms}^{-2}$$

- b) De algunas de las dos ecuaciones se despeja la tensión:

$$P_1 - T = m_1 a \Rightarrow (165\text{ kg})(9,81\text{ ms}^{-2}) - T = (165\text{ kg})(3,7\text{ ms}^{-2}) \Rightarrow T = 1,0 \cdot 10^3\text{ N}$$

- c) Se trata de un *mrva* con velocidad inicial nula, así:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (5,2\text{ m})}{(3,7\text{ ms}^{-2})}} = 1,7\text{ s}$$



58. El limpiacristales de la figura se eleva a sí mismo mediante una fuerza  $F$ . Su masa es de 68 kg y la plataforma, de un material muy ligero, tiene una masa de 16 kg.

- a) Calcula el valor de dicha fuerza si él quiere subir con una aceleración de  $0,57\text{ m s}^{-2}$ .  
b) ¿Qué fuerza tendría que realizar para subir con velocidad constante?



- a) El limpiacristales tira con una fuerza  $F$  hacia abajo. Esta fuerza es igual a la tensión. Si se considera todo como un sistema y se aplica el segundo principio de la dinámica.

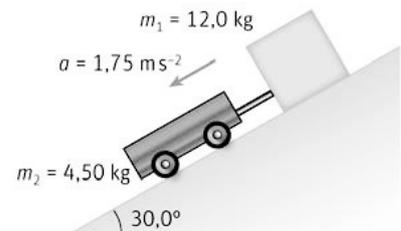
$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a) = (84 \text{ kg})[(9,8 \text{ ms}^{-2}) + (0,57 \text{ ms}^{-2})] = 872 \text{ N}$$

Como  $F = T \Rightarrow F = 872 \text{ N}$ .

- b) Al ser la velocidad constante, la aceleración es nula.

$$T - mg = 0 \Rightarrow T = mg = (84 \text{ kg})(9,8 \text{ ms}^{-2}) = 824 \text{ N}$$

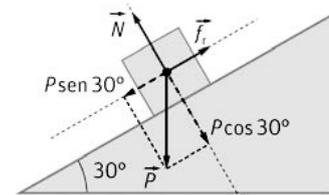
59. Un bloque de madera, de masa  $12,0 \text{ kg}$ , permanece en reposo apoyado en un plano inclinado de  $30,0^\circ$  con rozamiento. Al atarle una masa con ruedas de  $4,50 \text{ kg}$ , para la que puede despreciarse el rozamiento, ambos descienden con una aceleración de  $1,75 \text{ m s}^{-2}$ . Calcula:



- a) La fuerza de rozamiento entre el bloque y el plano antes de unir la segunda masa.  
 b) Determina el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático.  
 c) El coeficiente de rozamiento cinético.  
 a) Como la masa permanece en reposo.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg \sin \alpha - f_r = 0$$

$$f_r = mg \sin \alpha = (12,0 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2}) \sin 30^\circ = 58,9 \text{ N}$$



- b) El valor mínimo del coeficiente estático se produce cuando:  
 $\mu_e = \tan \alpha = \tan 30,0^\circ = 0,58$

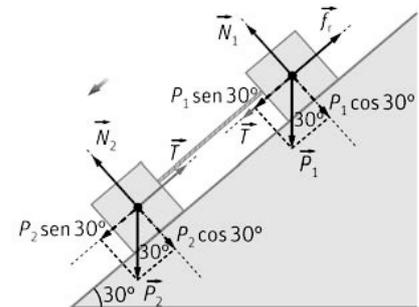
- c) Solo existe rozamiento entre el bloque y el plano inclinado. Aplicando el segundo principio a cada masa:

$$(1) T + m_1 g \sin \alpha - \mu_c m_1 g \cos \alpha = m_1 a \quad (2) m_2 g \sin \alpha - T = m_2 a$$

Sumando y despejando:

$$\mu_c = \frac{g \sin \alpha (m_1 + m_2) - (m_1 + m_2) a}{m_1 g \cos \alpha}$$

$$\mu_c = \frac{(12,0 \text{ kg} + 4,5 \text{ kg})[(9,81 \text{ ms}^{-2}) \sin 30^\circ - (1,75 \text{ ms}^{-2})]}{(12,0 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2}) \cos 30^\circ} = 0,51$$



60. En la figura se ve como un piloto de Moto GP se inclina para tomar una curva.

- a) Indica las fuerzas que actúan sobre el piloto.  
 b) Calcula la máxima velocidad con la que puede tomar la curva sabiendo que el radio de la misma es de  $32 \text{ m}$ , el ángulo máximo que puede inclinar la moto es  $41^\circ$  y que la marca de neumáticos ha conseguido un caucho con un coeficiente de rozamiento estático  $0,88$ .  
 c) ¿Cómo afectará el desgaste de la rueda en la velocidad máxima?



- a) Las fuerzas que actúan son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento.

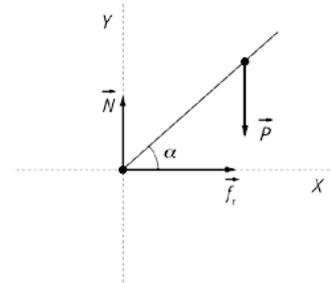
b) Se aplica el 2.º principio de la dinámica en los dos ejes;

Eje Y:  $N - P = 0 \Rightarrow N = P = mg$

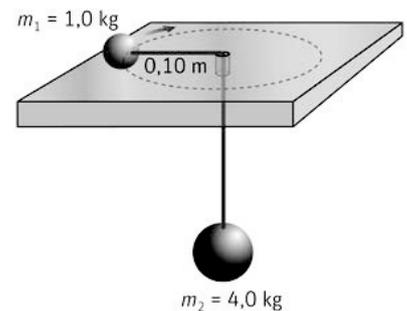
Eje X:  $f_r = \mu N = m a_c \Rightarrow \mu mg = m \frac{v^2}{R}$

$v = \sqrt{\mu R g} = \sqrt{0,88 \cdot (32 \text{ m})(9,8 \text{ ms}^{-2})} = 17 \text{ ms}^{-1}$

c) Al desgastarse el neumático, el coeficiente de rozamiento disminuye. Como se observa en la expresión anterior, la velocidad con la que puede tomar la curva será menor.



61. Una masa  $m_1 = 1,0 \text{ kg}$  que esta sobre una mesa sin rozamiento, se encuentra unida a una masa  $m_2 = 4,0 \text{ kg}$  colgada mediante una cuerda que pasa por un agujero practicado en la mesa. El cuerpo de masa  $m_2$  está en reposo, mientras que el cuerpo de masa  $m_1$  describe un movimiento circular uniforme de radio  $0,10 \text{ m}$ .



a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre ambas masas y calcula la velocidad del cuerpo de masa  $m_2$ .

b) Calcula la aceleración normal y tangencial en la masa de  $1,0 \text{ kg}$ .

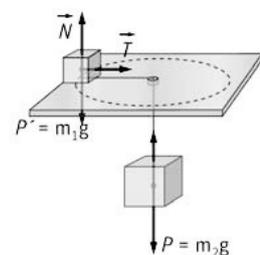
a) La masa sobre la mesa se mueve con un m.c.u. Se aplica la segunda ley de Newton a las dos masas.

$$\left. \begin{aligned} T - m_2 g &= 0 \Rightarrow T = m_2 g \\ T &= m_1 a \Rightarrow T = m_1 \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_2 g = m_1 \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}} = \sqrt{\frac{(4 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2})(0,10 \text{ m})}{(1 \text{ kg})}} = 2,0 \text{ ms}^{-1}$$

b) La aceleración normal es:  $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2,0 \text{ ms}^{-1})^2}{(0,10 \text{ m})} = 40 \text{ ms}^{-2}$

Como el módulo de la velocidad no cambia, la aceleración tangencial es nula.



62. En algunas ferias hay una atracción que consiste en un cilindro que puede girar en torno a su eje. Los viajeros se colocan con la espalda contra la pared del cilindro que empieza girar. En un determinado momento se retira la base del cilindro pero los viajeros siguen girando con el dispositivo.

a) Explica por qué no se caen.

b) Si el cilindro tiene un diámetro de  $8,0 \text{ m}$  y el coeficiente de rozamiento de la pared es  $\mu = 0,80$ , ¿a qué velocidad angular mínima debe girar para que un viajero de  $70 \text{ kg}$  siga pegado? Exprésala en rpm.

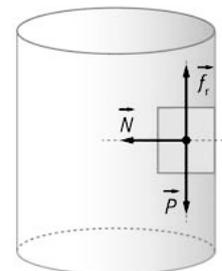
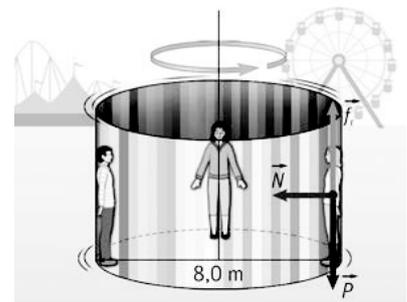
c) ¿Influye la masa de cada viajero en esta velocidad?

a) Sobre cada viajero actúan tres fuerzas, su peso, el rozamiento con la pared del cilindro y la normal perpendicular a la pared interna del cilindro (radial) y hacia su centro, fuerza que proporciona la fuerza centrípeta, es decir aquella que impide que el viajero salga "por la tangente", cambiando la dirección del vector velocidad. No se caen al ser la fuerza de rozamiento mayor que el peso.

b) Aplicando la segunda ley de Newton en los dos ejes:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= m a \Rightarrow N = m a \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow f_r - m g = 0 \end{aligned} \right\} f_r = \mu N = m g \Rightarrow \mu m a_n = m g \Rightarrow \mu \frac{v^2}{R} = g$$

$$v = \sqrt{\frac{g R}{\mu}} = \sqrt{\frac{(9,8 \text{ ms}^{-2})(4 \text{ m})}{0,80}} = 7,0 \text{ ms}^{-1}$$



$$v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{(7,0 \text{ ms}^{-1})}{(4 \text{ m})} = 1,75 \text{ rad s}^{-1} = \left( \frac{1,75 \text{ rad}}{1 \text{ s}} \right) \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) \left( \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 17 \text{ rpm}$$

c) Como se puede observar en el apartado b), la masa no influye.

## Fuerzas elásticas

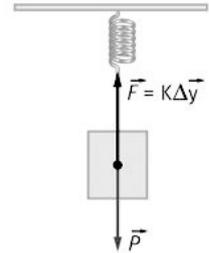
63. Un muelle de constante  $k = 162 \text{ N m}^{-1}$  está suspendido del techo de un ascensor. Del otro extremo cuelga un cuerpo de  $2,50 \text{ kg}$ . Calcula la deformación producida cuando el ascensor sube con velocidad constante y cuando arranca con una aceleración de  $1,20 \text{ m s}^{-2}$ .

a) Aplicando la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta que la velocidad es constante.

$$\sum F = ma = 0 \Rightarrow k\Delta y - mg = 0 \Rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{(2,50 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2})}{(162 \text{ Nm}^{-1})} = 0,151 \text{ m}$$

b) En este caso si hay aceleración:

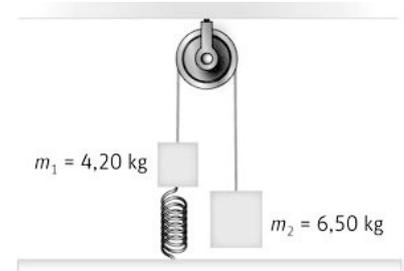
$$\sum F = ma \Rightarrow k\Delta y - mg = ma \Rightarrow \Delta y = \frac{m(g+a)}{k} = \frac{(2,50 \text{ kg})[(9,81+1,2) \text{ ms}^{-2}]}{(162 \text{ Nm}^{-1})} = 0,170 \text{ m}$$



64. En una polea se cuelgan dos masas de  $4,20 \text{ kg}$  y  $6,50 \text{ kg}$ . La masa de  $4,20 \text{ kg}$  está unida al suelo mediante un muelle.

a) Calcula la fuerza del muelle sobre la masa de  $4,20 \text{ kg}$ .

b) Si se corta la cuerda que une ambas masas, ¿con qué aceleración comenzará a moverse la masa de  $4,20 \text{ kg}$ , justo en ese instante?



a) Se aplica el segundo principio de la dinámica en las dos masas:

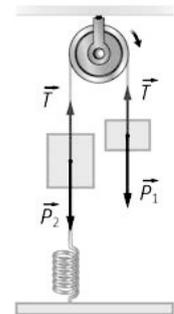
$$\left. \begin{aligned} (1) \sum F = 0 &\Rightarrow T = m'g \\ (2) \sum F = 0 &\Rightarrow T - F_{\text{muelle}} - mg = 0 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo la tensión:

$$m'g - F_{\text{muelle}} - mg = 0 \Rightarrow F_{\text{muelle}} = [(6,50 - 4,20) \text{ kg}](9,81 \text{ ms}^{-2}) = 22,6 \text{ N}$$

b) Si se corta la cuerda la tensión desaparece. Las otras dos fuerzas que actúan sobre la masa con cambian. Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$-mg - F_{\text{muelle}} = ma \Rightarrow a = \frac{-mg - F_{\text{muelle}}}{m} = -15,2 \text{ ms}^{-2}$$



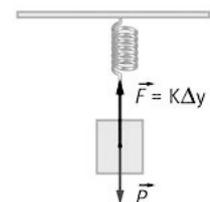
65. En una carpintería guardan los clavos en una caja. Para calcular la cantidad de clavos que tienen, cuelgan al principio del día la caja de un muelle y observan que este se alarga  $0,50 \text{ m}$ . Al final del día vuelven a colgarla otra vez y observan que el muelle se alarga  $0,20 \text{ m}$ . ¿Qué porcentaje de clavos quedan en la caja?

Se aplica la segunda ley de Newton y recordando que la fuerza elástica es proporcional al alargamiento.

$$\text{Al comienzo del día: } \sum F = 0 \Rightarrow k\Delta y = mg$$

$$\text{Al finalizar el mismo: } k\Delta y' = m'g$$

$$\text{Dividiendo y sustituyendo datos: } \frac{m}{m'} = \frac{0,20}{0,50} = 0,40 \Rightarrow 40 \%$$



66. Un vehículo deportivo tiene una masa en vacío de 1615 kg y su suspensión se basa en cuatro muelles helicoidales. Suponiendo que el peso del vehículo se distribuye uniformemente entre los cuatro muelles y que con el coche vacío estos están comprimidos 10,0 cm, contesta a estas preguntas.

a) ¿Cuánto vale la constante elástica de estos resortes?

b) ¿Cuánto se comprimirán los muelles si el coche lleva cuatro adultos de 70,0 kg de masa y 200,0 kg de maletas?

a) El peso del coche es:  $P = mg = (1615 \text{ kg})(9,81 \text{ ms}^{-2}) = 1,58 \cdot 10^4 \text{ N}$

El peso se distribuye entre los cuatro muelles. A cada uno le corresponde:  $\frac{P}{4} = 3,96 \cdot 10^3 \text{ N}$

Aplicando la ley de Hooke:  $F = k \Delta y \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{(3,96 \cdot 10^3 \text{ N})}{(0,100 \text{ m})} = 3,96 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}$

b) Con el coche cargado a cada muelle le corresponde un peso:

$$P = \frac{[(1615 + 4 \cdot 70,0 + 200,0) \text{ kg}](9,81 \text{ ms}^{-2})}{4} = 5,14 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Aplicando la ley de Hooke:

$$\Delta y = \frac{F}{k} = \frac{(5,14 \cdot 10^3 \text{ N})}{(3,96 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1})} = 0,130 \text{ m}$$

67. Actividad smSaviadigital.com RESUELVE.

68. Actividad smSaviadigital.com RESUELVE

## La física y las fuerzas fundamentales

1. **Actividad** smSaviadigital.com INVESTIGA

2. **La materia oscura y la energía oscura son enigmas recientes de la física. Busca información sobre ello.**

La existencia de la materia oscura se ha propuesto para armonizar los efectos gravitacionales ejercidos (y medidos) por diversas galaxias con la cantidad de materia observada (materia visible) que contienen. Se piensa que tal vez solo se puede ver el 20 % de la materia existente.

La energía oscura es un tipo de energía cuya naturaleza se desconoce actualmente pero cuya existencia se postula para conjugar la velocidad de expansión del universo observada con la velocidad de expansión prevista por los diversos modelos del Big Bang (la expansión parece acelerarse).

## Autoevaluación

- Un astronauta en la Estación Espacial Internacional “flota” en la cabina porque:
  - Su peso es cero.
  - Está en ingravidez.
  - Está en caída libre.
  - Está muy lejos de la Tierra.

c
- Una esfera de metal tiene una carga de  $+9,0 \mu\text{C}$ . Si se le añaden  $6,0 \cdot 10^{13}$  electrones, su carga neta será:
  - $19 \mu\text{C}$
  - $-0,60 \mu\text{C}$
  - $-9,6 \mu\text{C}$
  - $0 \mu\text{C}$

b
- Un alpinista de masa  $65 \text{ kg}$  cayó en una grieta si en un glaciar, tal como se indica en la figura, sin contar el rozamiento, ¿cuál debe ser la masa mínima de un compañero para que este sea capaz de sujetarlo en el aire mientras llega el helicóptero?
 
  - $75 \text{ kg}$
  - $65 \text{ kg}$
  - $130 \text{ kg}$
  - $135 \text{ kg}$

a
- Un cuerpo se desliza por un plano inclinado de  $15^\circ$  con velocidad constante. ¿Cuánto valdrá la aceleración (en  $\text{m s}^{-2}$ ) si se desliza sobre el mismo plano inclinado cuando forma un ángulo de  $25^\circ$  con la horizontal?
  - $3,7$
  - $1,7$
  - $2,5$
  - Ninguna de las anteriores.

b
- Una furgoneta que se desplaza en sentido negativo del eje  $X$  lleva un péndulo sujeto al techo. Cuando la aceleración del vehículo es  $5,66 \text{ m s}^{-2}$ , el ángulo que forma el péndulo con la horizontal es:
  - $60^\circ$
  - $-30^\circ$
  - $30^\circ$
  - $-60^\circ$

d
- “El globo de la muerte” es una estructura de acero de unos  $5,0 \text{ m}$  de diámetro donde un motorista describe circunferencias. La velocidad mínima que debe llevar un motorista en la parte superior de un círculo vertical para que no caiga es:
 
  - $5,0 \text{ m s}^{-1}$
  - $7,0 \text{ m s}^{-1}$
  - $4,0 \text{ m s}^{-1}$
  - $6,0 \text{ m s}^{-1}$

a