

Polígonos. Triángulos

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Di cómo es el ángulo que forman las agujas del reloj a todas las horas en punto.

Cada hora equivale a una abertura de $360^\circ : 12 = 30^\circ$

A las 12 h: ángulo = 0°

A las 11 h y a la 1 h: ángulo = 30°

A las 10 h y a las 2 h: ángulo = 60°

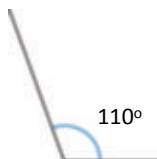
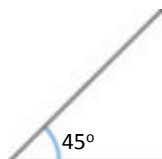
A las 9 h y a las 3 h: ángulo = 90°

A las 8 h y a las 4 h: ángulo = 120°

A las 7 h y a las 5 h: ángulo = 150°

A las 6 h: ángulo = 180°

2. Dibuja en tu cuaderno un ángulo de 45° y otro de 110° .



VIDA COTIDIANA

Un teodolito es un instrumento para medir ángulos, con el que podemos realizar mediciones a cierta distancia e incluso en lugares inaccesibles.

Con un teodolito María y Juan han medido los ángulos que forman con Andrés.



- ¿Qué tipo de triángulo forman María, Juan y Andrés?
- ¿Cuál es el ángulo que forma Juan con Andrés y María?

Forman un triángulo rectángulo.

Un ángulo recto.

RESUELVE EL RETO

Si junto dos triángulos iguales por uno de sus lados, ¿cuántos lados puede tener la figura resultante?

Tendrá 4 lados.

¿Cuántos triángulos hay en esta figura?



Hay 10 triángulos pequeños y luego podemos considerar diferentes uniones de ellos hasta hacer un total de 23 triángulos.

Camino durante 1 minuto en línea recta y luego cambio de dirección. Si hago esto durante 6 minutos y vuelvo al punto de partida sin pasar dos veces por el mismo sitio, ¿cuánto suman todos los giros que he dado?

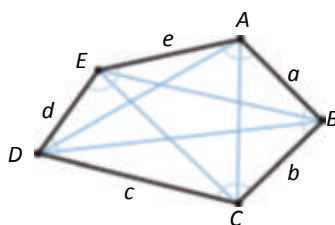
Hay varias opciones, pero al final es como dar una vuelta entera, es decir, 360° .

Al dibujar uno de los puntos notables de un triángulo ha coincidido con uno de sus vértices. ¿Qué punto he dibujado y cómo es el triángulo?

Se han dibujado las alturas de un triángulo rectángulo.

ACTIVIDADES

1. Dibuja un polígono irregular de 5 lados y señala todos sus elementos.



Vértices: A, B, C, D, E

Lados: a, b, c, d, e

Ángulos interiores: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$

Diagonales: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$

2. Razona si es verdadero o falso.

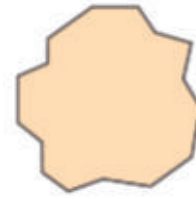
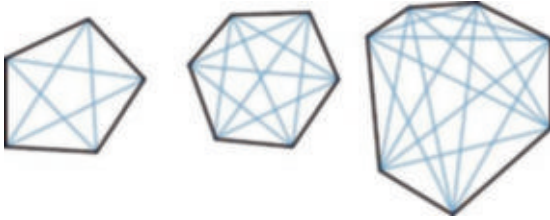
a) El número de lados es igual al de vértices más uno.

b) En un polígono irregular ningún lado es igual a otro.

a) Falso. El número de lados y vértices es el mismo.

b) Falso. Un polígono es irregular si hay al menos un lado o un ángulo diferente al resto.

3. Dibuja varios polígonos, con 5, 6, 7... lados. Traza sus diagonales y cuéntalas.
¿Puedes deducir cuántas diagonales tendrá un polígono de 16 lados?



Un polígono de 5 lados tiene 5 diagonales.

Un polígono de 6 lados tiene 9 diagonales.

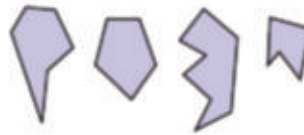
Un polígono de 7 lados tiene 14 diagonales.

...

El número de diagonales de un polígono de n lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

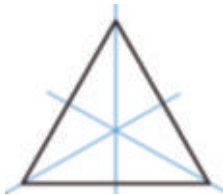
Un polígono de 16 lados tiene 104 diagonales

4. Clasifica los polígonos que ves a la derecha según su número de lados.



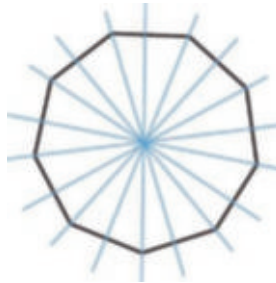
De izquierda a derecha: hexágono, pentágono, octógono y pentágono.

5. Dibuja un polígono que tenga tres ejes de simetría.



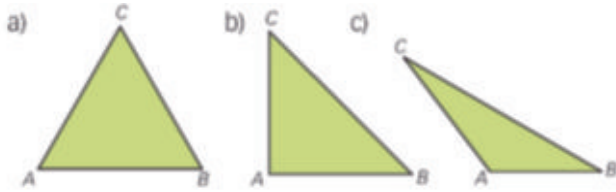
Un triángulo regular (equilátero).

6. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un heptágono? ¿Y un eneágono?



Un heptágono regular tiene 7 ejes de simetría y un eneágono regular tiene 9 ejes, cada eje pasa por un vértice y la mitad del lado opuesto.

7. Clasifica estos triángulos según sus vértices y según sus lados.



a) Triángulo equilátero.

b) Triángulo rectángulo.

c) Triángulo obtusángulo.

8. Dibuja un triángulo escaleno que sea también rectángulo.



Tiene un ángulo recto y todos sus ángulos y lados son distintos.

9. Averigua si existen estos triángulos.

- Triángulo rectángulo isósceles.
- Triángulo obtusángulo rectángulo.
- Triángulo escaleno acutángulo.
- Triángulo isósceles escaleno.

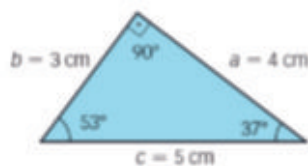
a) Sí existe. Un triángulo rectángulo en el que los catetos miden lo mismo.

b) No existe. Si un ángulo mide 90° y otro más de 90° , entre los dos ya suman más de 180° y eso no puede ser.

c) Sí existe.

d) No existe. Si es isósceles, dos lados son iguales; pero si es escaleno, sus tres lados son distintos, de modo que no es posible que se den las dos cosas a la vez.

10. Comprueba las relaciones entre los lados y los ángulos de este triángulo



$$37^\circ + 53^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$4 < 3 + 5 \quad 3 < 4 + 5 \quad 5 < 3 + 4$$

$$4 > 5 - 3 \quad 3 > 5 - 4 \quad 5 > 4 - 3$$

11. ¿Existen triángulos con estas medidas?

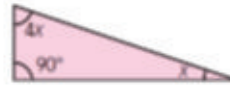
- 3, 3 y 4 cm
- 3, 5 y 9 cm
- 2, 4 y 6 cm

a) $3 < 3 + 4$ $4 < 3 + 3$ $3 > 4 - 3$ $4 > 3 - 3 \rightarrow$ Sí existe.

b) $9 > 3 + 5 \rightarrow$ No existe.

c) $6 = 2 + 4 \rightarrow$ No existe.

12. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es el cuádruple de otro. Calcula los ángulos de este triángulo.



$$90^\circ + 4x + x = 180^\circ \rightarrow 5x = 90^\circ \rightarrow x = 18^\circ \rightarrow \text{Los ángulos valen } 18^\circ \text{ y } 72^\circ.$$

13. Determina cuáles de estos segmentos pueden formar un triángulo y dibújalo.

a) $a = 5,2 \text{ cm}; b = 7,3 \text{ cm}; c = 4 \text{ cm}$

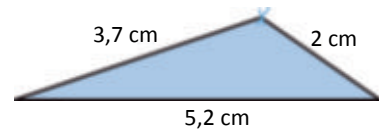
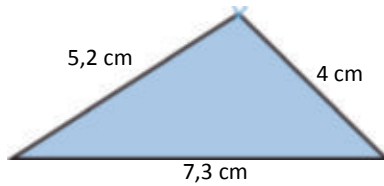
c) $a = 2 \text{ cm}; b = 5,2 \text{ cm}; c = 3,7 \text{ cm}$

b) $a = 1,8 \text{ cm}; b = 3 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm}$

d) $a = 5 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}; c = 7 \text{ cm}$

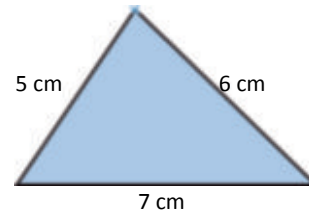
a) $5,2 < 7,3 + 4$ $7,3 < 5,2 + 4$ $4 < 5,2 + 7,3$
Sí, forman un triángulo.

c) $2 < 5,2 + 3,7$ $5,2 < 2 + 3,7$ $3,7 < 2 + 5,2$
Sí forman un triángulo.



b) $5 > 1,8 + 3 \rightarrow$.
No forman un triángulo.

d) $5 < 7 + 6$ $6 < 5 + 7$ $7 < 5 + 6$
Sí forman un triángulo.



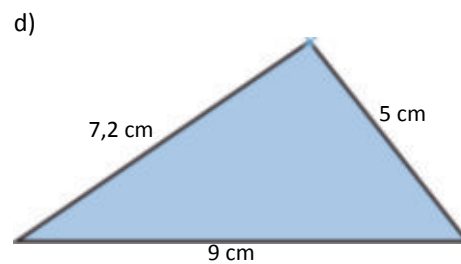
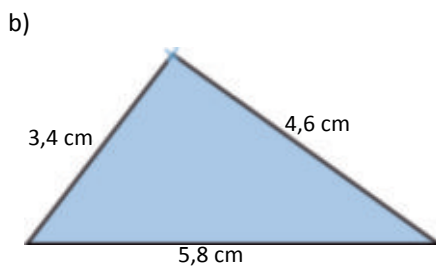
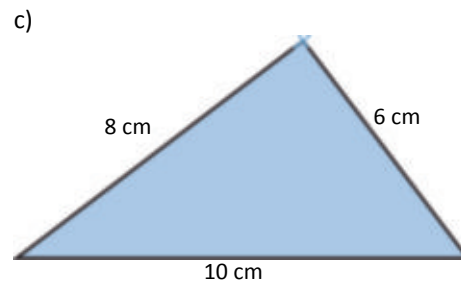
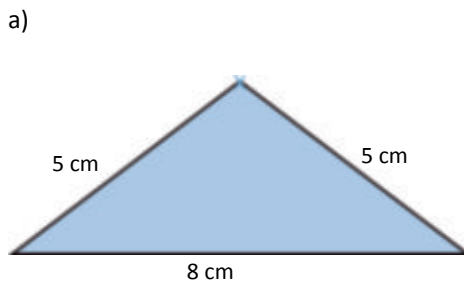
14. Construye el triángulo que tiene por lados estos segmentos.

a) $a = 5 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}; c = 8 \text{ cm}$

c) $a = 6 \text{ cm}; b = 8 \text{ cm}; c = 10 \text{ cm}$

b) $a = 3,4 \text{ cm}; b = 4,6 \text{ cm}; c = 5,8 \text{ cm}$

d) $a = 5 \text{ cm}; b = 7,2 \text{ cm}; c = 9 \text{ cm}$



15. Calcula entre qué valores se puede encontrar el lado c para que se pueda formar un triángulo.

- a) $a = 4 \text{ cm}$ y $b = 7 \text{ cm}$ b) $a = 2 \text{ cm}$ y $b = 5 \text{ cm}$

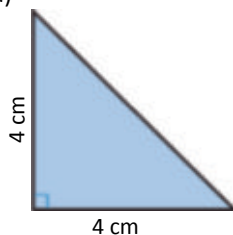
a) $7 - 4 < c < 4 + 7 \rightarrow 3 < c < 11 \rightarrow c$ debe ser mayor que 3 y menor que 11.

b) $5 - 2 < c < 2 + 5 \rightarrow 3 < c < 7 \rightarrow c$ debe ser mayor que 3 y menor que 7.

16. Construye un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales midan:

- a) 4 cm b) 2,8 cm c) 5,6 cm d) 6 cm

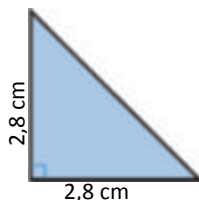
a)



c)



b)



d)



17. Razona si estas medidas pueden ser las de los lados de un triángulo para cualquier valor de a .

- a) a , $4a$ y $5a$ b) a , $2a$ y $\frac{7}{5}a$



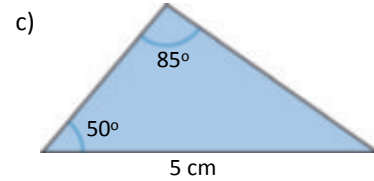
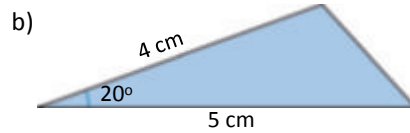
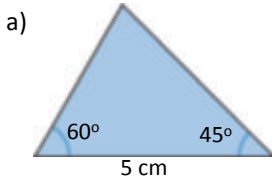
a) $a + 4a = 5a \rightarrow$ Estas medidas no forman un triángulo para cualquier valor de a .

b) $a < 2a + \frac{7}{5}a$ $2a < a + \frac{7}{5}a = \frac{12}{5}a$ $\frac{7}{5}a < a + 3a = 3a \rightarrow$ Estas medidas sí forman un triángulo para cualquier valor de a .

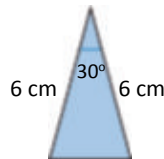
18. Dibuja triángulos cuyos elementos sean:

a) $a = 5 \text{ cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$ y $\hat{C} = 45^\circ$ c) $a = 5 \text{ cm}$, $\hat{B} = 50^\circ$ y $\hat{A} = 85^\circ$

b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $\hat{C} = 20^\circ$



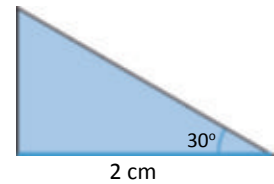
19. Construye un triángulo isósceles en el que cada uno de sus dos lados iguales mide 6 cm y el ángulo comprendido entre esos dos lados mide 30° .



20. Fíjate en esta figura y explica cómo se puede construir un triángulo rectángulo del que sabemos que uno de sus lados mide $c = 2 \text{ cm}$ y tiene un ángulo agudo $\hat{B} = 30^\circ$.

Primero dibujamos un segmento igual a uno de los lados conocidos (2 cm), y construimos sobre él sus ángulos contiguos (90° y 30° respectivamente).

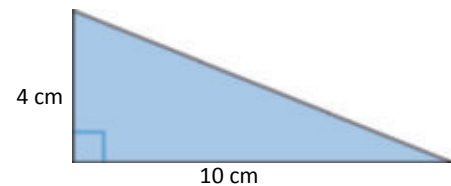
Después, prolongamos los lados de los ángulos hasta que se corten.



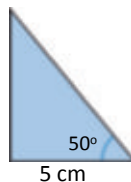
21. Construye un triángulo rectángulo cuyos dos lados menores midan 4 cm y 10 cm.

Dibujamos un segmento igual a uno de los lados conocidos (por ejemplo, 10 cm) y construimos sobre él un ángulo de 90° .

Prolongamos el lado del ángulo hasta que tenga la longitud del segundo lado conocido (4 cm), y unimos los extremos de ambos lados.



22. Construye un triángulo rectángulo en el que uno de sus lados menores mida 5 cm y uno de sus ángulos contiguos sea $\hat{B} = 50^\circ$.

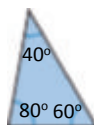


23. Dibuja un triángulo cuyos ángulos sean $A = 80^\circ$, $B = 60^\circ$ y $C = 40^\circ$.

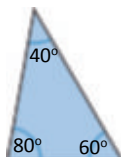
¿Puedes dibujar otro triángulo con los mismos ángulos y cuyos lados midan más que los lados que el triángulo que has dibujado anteriormente?

¿Y un triángulo con lados más pequeños?

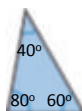
¿Cuántos triángulos existen que tengan los mismos ángulos?



Sí se puede dibujar otro triángulo con los mismos ángulos y lados mayores. Por ejemplo:



Sí se puede dibujar otro triángulo con los mismos ángulos y lados menores. Por ejemplo:



Existen infinitos triángulos con los mismos ángulos.

24. Copia en tu cuaderno y colorea de rojo los ángulos de estos polígonos y redondea los convexos.



25. Dibuja un octógono y traza todas sus diagonales. Calcula el número total de diagonales.



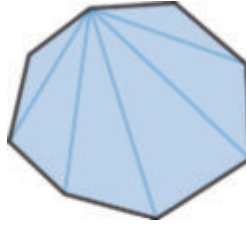
$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20 \text{ diagonales.}$$

26. ¿Cuántos lados tiene un polígono en el que se pueden dibujar en total 27 diagonales?

$$\frac{n(n-3)}{2} = 27 \Rightarrow n(n-3) = 54$$

$$9 \cdot (9-3) = 9 \cdot 6 = 54 \rightarrow \text{Un polígono de 9 lados tiene 27 diagonales.}$$

27. Traza las diagonales de un octógono y halla la suma de sus ángulos.



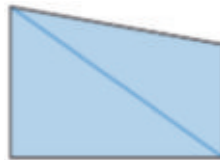
Se obtienen $8 - 2 = 6$ triángulos $\rightarrow$ La suma de los ángulos del octógono es $180^\circ \cdot 6 = 1080^\circ$

28. ¿Cuánto suman los ángulos de un polígono que tiene 8 diagonales?

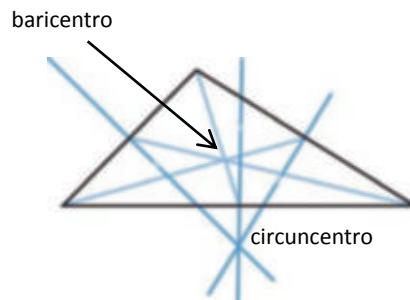
Si desde un vértice salen 8 diagonales, se obtienen entonces $8 + 1 = 9$ triángulos, con lo que la suma de los ángulos del polígono es $9 \cdot 180^\circ = 1620^\circ$.

29. ¿Cuál es el menor número de lados que debe tener un polígono para que se pueda hacer su triangulación? Dibuja ese polígono y triangúlalo. ¿Cuánto mide la suma de sus ángulos?

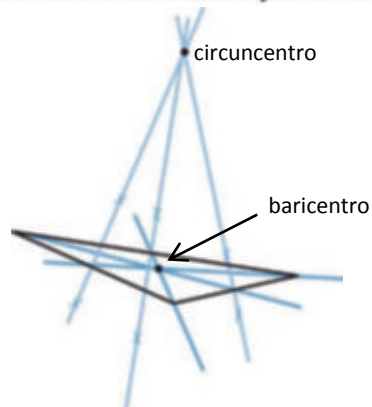
El menor número de lados es 4. La suma de sus ángulos es 360° .



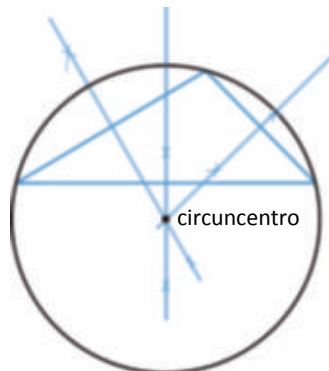
30. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 11 cm, respectivamente. Traza en él las medianas y las mediatrices.



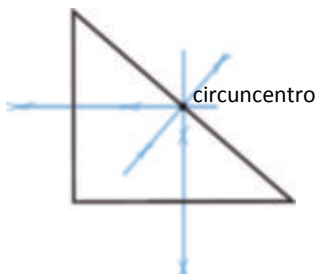
31. Dibuja un triángulo obtusángulo y determina su baricentro y su circuncentro.



32. Dibuja la circunferencia circunscrita del triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 9,5 cm.

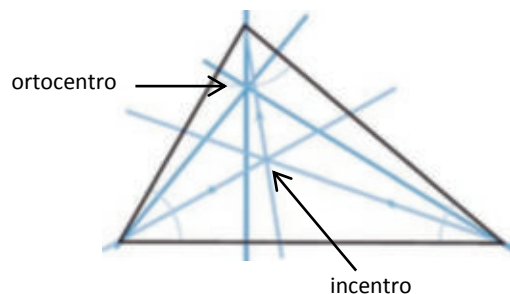


33. Dibuja un triángulo rectángulo. ¿Dónde está situado su circuncentro? ¿Ocurre lo mismo con todos los triángulos rectángulos?

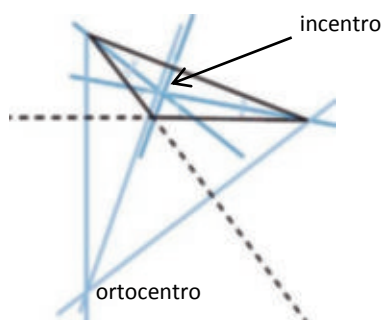


El circuncentro en cualquier triángulo rectángulo está situado en el punto medio del lado opuesto al ángulo recto.

34. Dibuja un triángulo acutángulo y traza sus alturas y sus bisectrices.



35. Dibuja un triángulo obtusángulo y traza sus alturas y sus bisectrices.

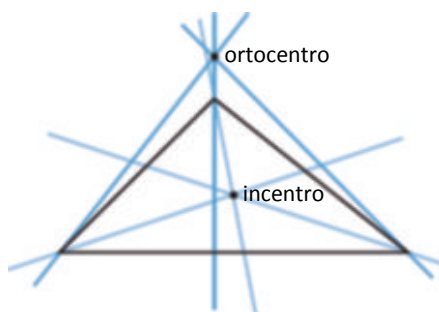


36. Para los siguientes triángulos, encuentra el ortocentro y el incentro.

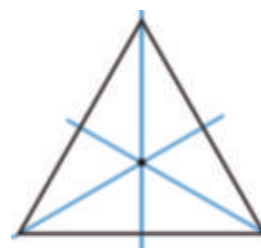
a) $a = 5,6$ cm; $b = 6,4$ cm; $c = 9$ cm

b) $a = b = c = 8$ cm

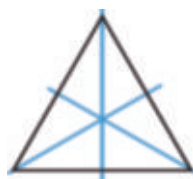
a)



b)



37. Comprueba que en un triángulo equilátero coinciden sus medianas, sus mediatrices, sus alturas y sus bisectrices.



En un triángulo equilátero coinciden sus alturas, bisectrices, mediatrices y medianas.

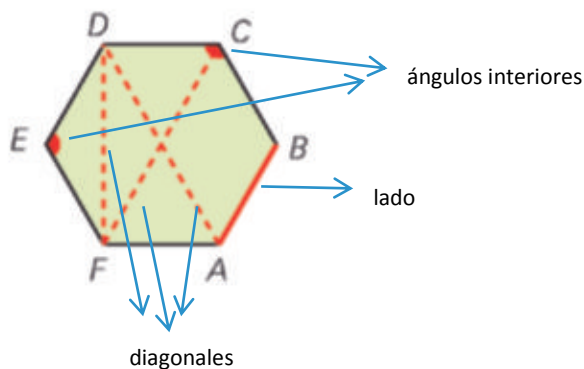
38. Razona qué características tiene un triángulo cuyo ortocentro está:

- a) En el exterior del triángulo.
 - b) En el interior del triángulo.
 - c) En uno de los lados del triángulo.
- a) Es un triángulo obtusángulo.
 - b) Es un triángulo acutángulo.
 - c) Es un triángulo rectángulo.

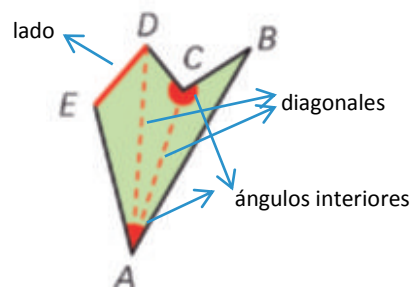
ACTIVIDADES FINALES

39. Indica el nombre de los elementos de estos polígonos que están coloreados de rojo.

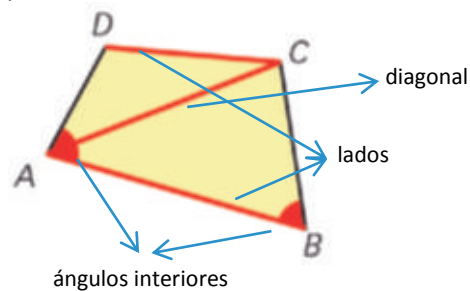
a)



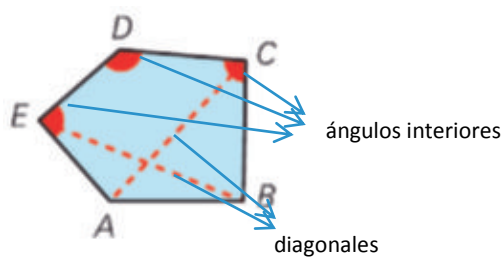
c)



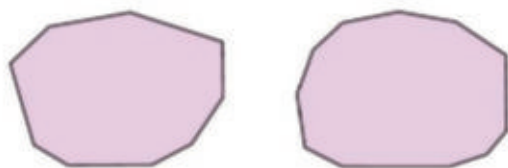
b)



d)

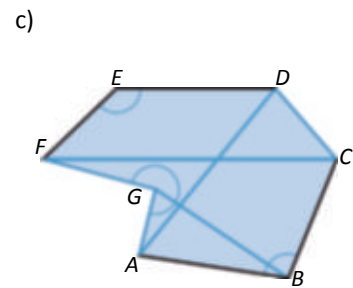
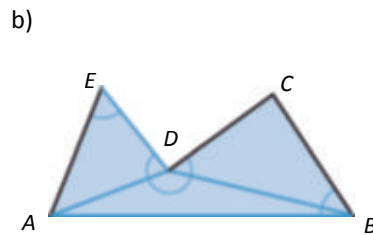
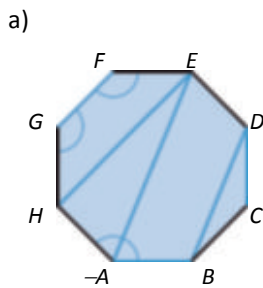
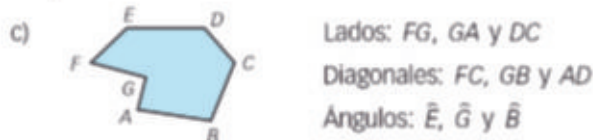
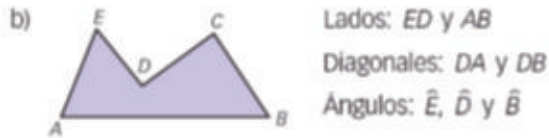


40. Indica según sus lados el nombre de estos polígonos.



El de la izquierda es un eneágono; el de la derecha, endecágono.

41. Dibuja los siguientes polígonos en tu cuaderno y colorea en rojo los elementos que se indican.



42. ¿Existe algún polígono que tenga una sola diagonal? ¿Y un polígono que no tenga diagonales?

No existe ningún polígono con una única diagonal.

El triángulo no tiene diagonales.

43. ¿Puede tener un polígono más vértices que lados? Razona la respuesta.

No, no puede, porque si fuera posible existiría al menos un par de vértices no unidos por un lado.

Los polígonos tienen el mismo número de vértices y de lados.

44. ¿Existe algún polígono que tenga más lados que ángulos interiores?

No, porque por cada vértice, hay un ángulo interior, con lo que un polígono tiene el mismo número de lados, que de vértices y que de ángulos interiores.

45. ¿Cuál es el número mínimo de lados de un polígono? ¿Y de ángulos interiores? ¿Y de diagonales?

El mínimo de lados de un polígono es 3, el triángulo.

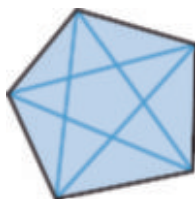
El de ángulos también 3.

El triángulo no tiene diagonales.

46. Dibuja, en cada caso, un polígono con estas características.

- Tiene cinco diagonales.
- Tiene nueve ángulos interiores y dos de ellos miden más de 180° .
- Tiene dos diagonales y una mide el doble que la otra.
- Tiene siete vértices y tres ángulos interiores que miden 90° .
- Tiene seis ángulos interiores, dos de ellos rectos.

a)



b)



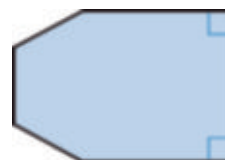
c)



d)



e)



48. Determina los ejes de simetría de los siguientes polígonos.

- Un triángulo equilátero.
- Un triángulo isósceles.
- Un triángulo rectángulo isósceles.
- Un cuadrado.
- Un rectángulo.
- Un rombo.
- Un romboide.

- 3 ejes (pasan por cada vértice y la mitad del lado opuesto).
- 1 eje (de la mitad del lado desigual al vértice opuesto).
- 1 eje (bisectriz del ángulo recto).
- 4 ejes (las dos diagonales y las dos rectas que pasan por el medio de un lado y el medio del lado opuesto).
- 2 ejes (las dos rectas que pasan por el medio de un lado y el medio del lado opuesto).
- 2 ejes (las 2 diagonales).
- No tiene.

49. Determina los ejes de simetría para cada uno de estos polígonos.

a)



c)



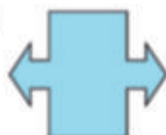
e)



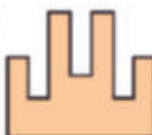
b)

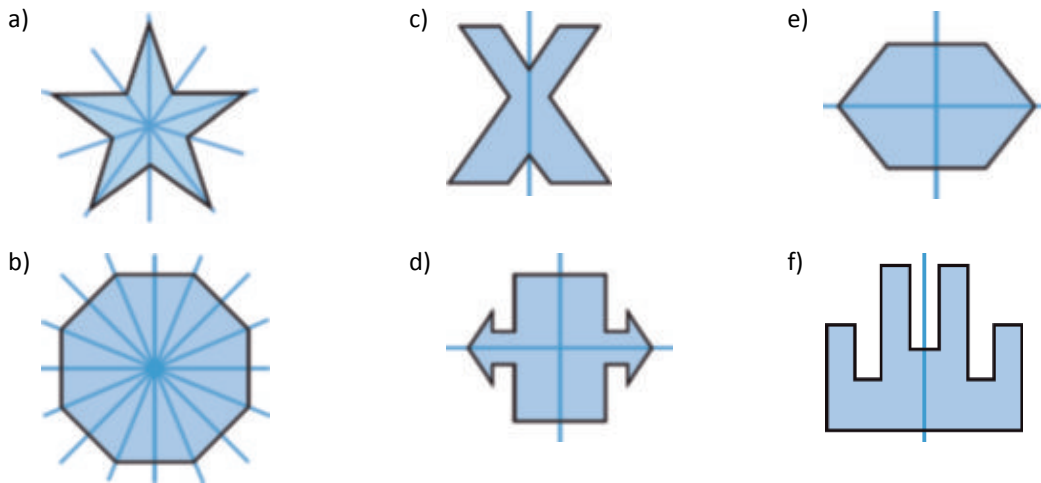


d)



f)

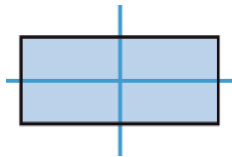




50. Dibuja un polígono que tenga dos ejes de simetría perpendiculares.

Respuesta abierta.

Por ejemplo:



51. Dibuja un polígono, con el menor número de lados posible, que tenga al menos un eje de simetría:

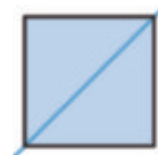
- a) Vertical. b) Horizontal. c) Oblicuo.

Respuesta abierta.

a) Triángulo isósceles

b) Rectángulo

c) Cuadrado



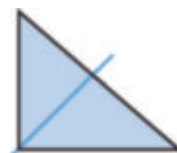
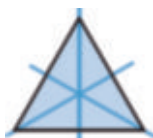
52. Dibuja, en cada caso, un triángulo que cumpla estas características.

- a) Tiene tres ejes de simetría.
b) Tiene un eje de simetría y es rectángulo.
c) No tiene ningún eje de simetría.

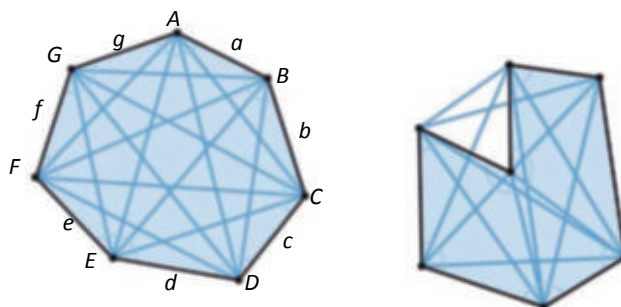
a) Triángulo equilátero.

b) Triángulo rectángulo isósceles.

c) Triángulo escaleno.

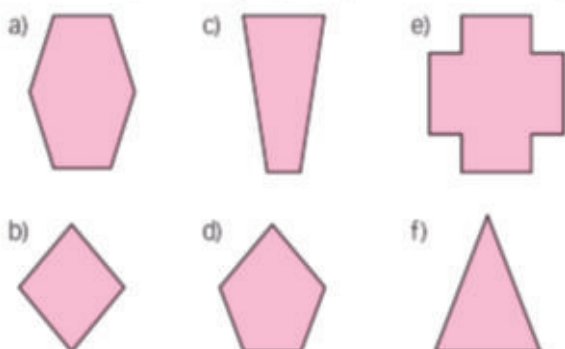


53. Dibuja un heptágono convexo y otro cóncavo, y señala en ellos los vértices, lados, ángulos interiores y diagonales.



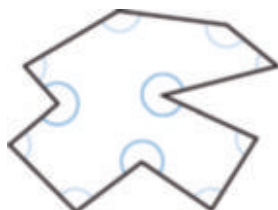
En los polígonos cóncavos, al menos una de las diagonales es exterior.

54. Para los siguientes polígonos, indica su nombre, si son regulares y si son convexos o cóncavos.



- a) Hexágono convexo irregular.
- b) Cuadrilátero convexo irregular.
- c) Dodecágono cóncavo irregular.
- d) Cuadrilátero convexo irregular.
- e) Pentágono convexo irregular.
- f) Triángulo convexo irregular.

55. Dibuja un polígono cóncavo de 11 lados. Colorea de azul los ángulos mayores de 180° y de rojo los menores de 180° .



Los menores de 180° están en azul claro y los mayores en azul oscuro.

56. ¿Puede ser un polígono cóncavo regular? Razona tu respuesta.

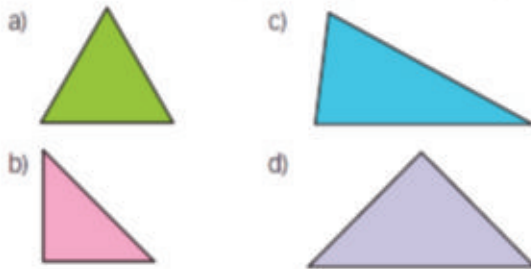
No. Un polígono regular tiene todos sus ángulos iguales, con lo que si es cóncavo, todos los ángulos deberían medir más de 180° , algo no posible.

57. Dibuja un polígono cóncavo que tenga un eje de simetría horizontal y otro que lo tenga vertical.

Respuesta abierta.



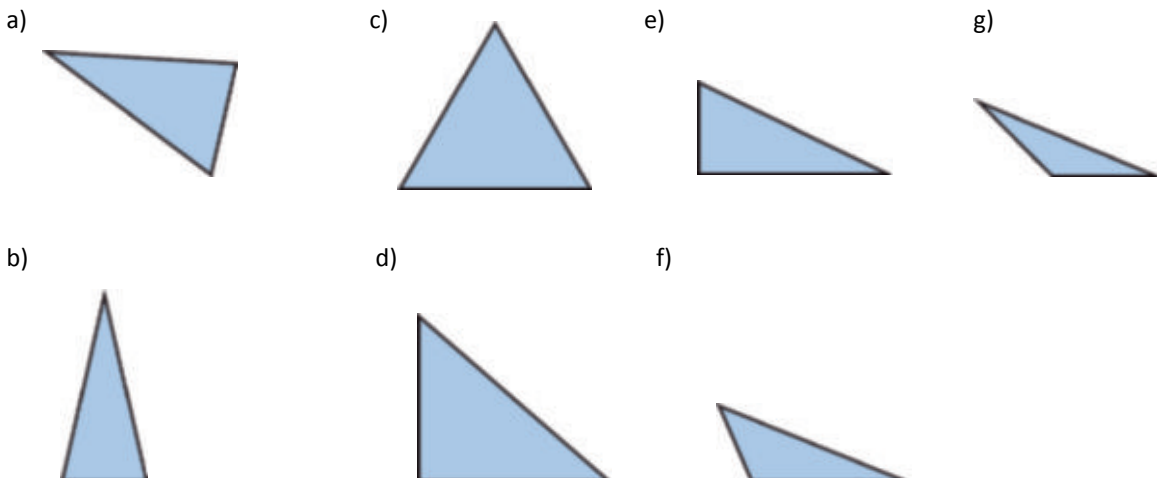
58. Clasifica estos triángulos según sus lados y sus ángulos.



a) Equilátero b) Isósceles rectángulo c) Escaleno d) Isósceles

59. Dibuja los siguientes triángulos.

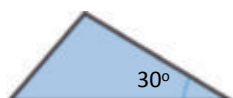
- Un triángulo acutángulo escaleno.
- Un triángulo acutángulo isósceles.
- Un triángulo acutángulo equilátero.
- Un triángulo rectángulo isósceles.
- Un triángulo rectángulo escaleno.
- Un triángulo obtusángulo escaleno.
- Un triángulo obtusángulo isósceles.



60. Con la ayuda de un transportador construye, en cada caso, un triángulo con las siguientes características.

- a) Triángulo acutángulo con un ángulo de 30° .
- b) Triángulo rectángulo con un ángulo de 30° .
- c) Triángulo rectángulo con un ángulo de 45° .
- d) Triángulo obtusángulo con un ángulo de 50° .
- e) Triángulo isósceles con un ángulo de 30° .
- f) Triángulo escaleno con un ángulo de 80° .

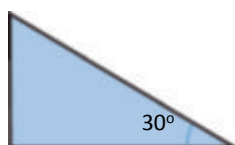
a)



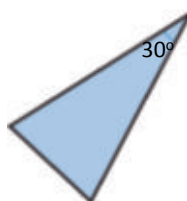
d)



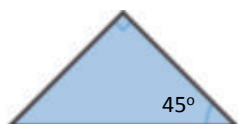
b)



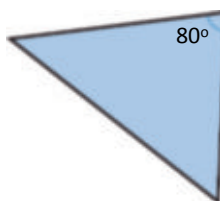
e)



c)



f)



61. Analiza si se puede dibujar un triángulo con estos segmentos. Dibuja los triángulos cuando sea posible.

a) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ y $c = 7 \text{ cm}$

d) $a = 6 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$ y $c = 10 \text{ cm}$

b) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ y $c = 9 \text{ cm}$

e) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 7 \text{ cm}$

c) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ y $c = 9 \text{ cm}$

f) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 5 \text{ cm}$

a) $7 < 4 + 5$

$5 < 4 + 7$

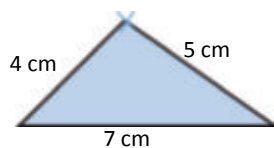
$4 < 7 + 5$

$7 > 5 - 4$

$5 > 7 - 4$

$4 > 7 - 5$

Se puede dibujar.



b) $9 < 6 + 4$

$6 < 9 + 4$

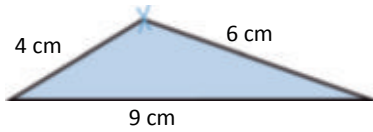
$4 < 9 + 6$

$9 > 6 - 4$

$6 > 9 - 4$

$4 > 9 - 6$

Se puede dibujar.



c) $9 > 5 + 3 \rightarrow$ No se puede dibujar.

d) $10 > 6 + 2 \rightarrow$ No se puede dibujar.

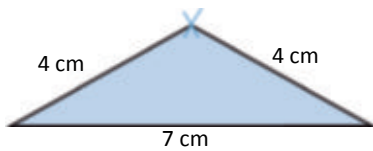
e) $7 < 4 + 4$

$4 < 4 + 7$

$7 > 4 - 4$

$4 > 7 - 4$

Se puede dibujar.



f) $5 < 3 + 4$

$3 < 5 + 4$

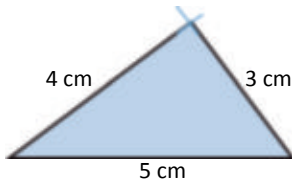
$4 < 5 + 3$

$5 > 4 - 3$

$4 > 5 - 3$

$3 > 5 - 4$

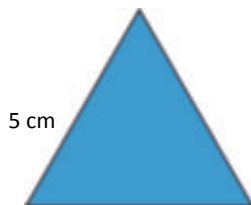
Se puede dibujar.



62. Dibuja un triángulo equilátero cuyos lados midan 5 cm. Mide con un transportador la dimensión de sus ángulos.

a) ¿Cuánto miden sus ángulos?

b) ¿Sucede esto con todos los triángulos equiláteros?



a) Miden todos 60° .

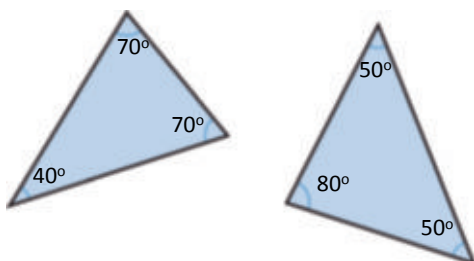
b) Sí, todos los ángulos de cualquier triángulo equilátero miden 60° .

63. Dibuja varios triángulos isósceles.
Mide la amplitud de sus ángulos.

- a) ¿Cuánto miden sus ángulos?
b) ¿Sucede esto con todos los triángulos isósceles?



a)

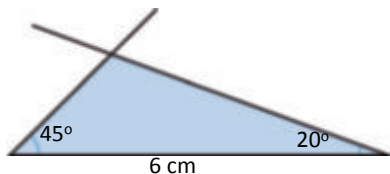


b) En un triángulo isósceles dos de los ángulos miden lo mismo.

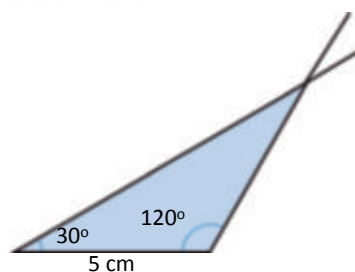
64. Construye un triángulo con estos elementos.

- a) Uno de sus lados mide 6 cm y sus dos ángulos contiguos 20° y 45° .
b) Uno de sus lados mide 7,5 cm y sus dos ángulos contiguos 60° y 30° .
c) Uno de sus lados mide 5 cm y sus dos ángulos contiguos 120° y 30° .
d) Uno de sus lados mide 8 cm y sus dos ángulos contiguos son iguales y miden 50° .

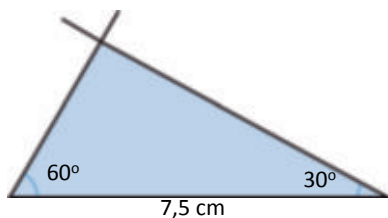
a)



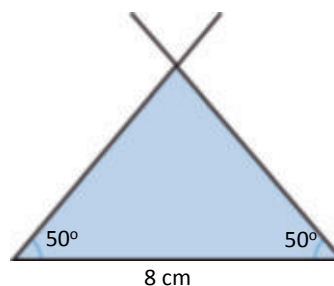
c)



b)



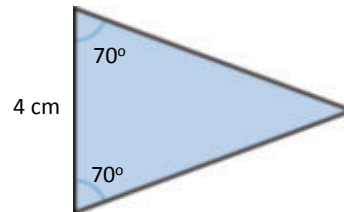
d)



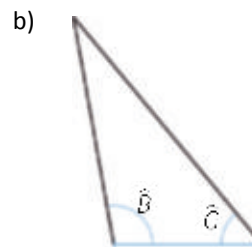
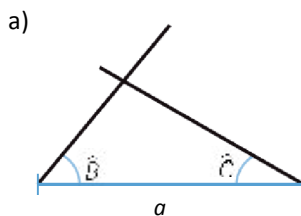
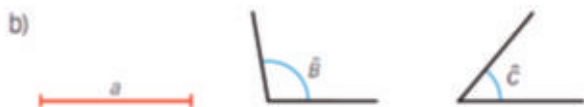
65. Construye un triángulo rectángulo que tiene un lado menor que mide 5 cm y un ángulo contiguo a este lado que mide 60° .



66. Construye un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 4 cm y sus ángulos iguales 70° cada uno.

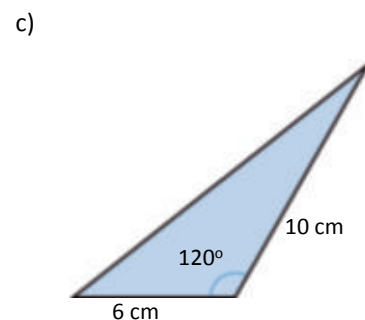
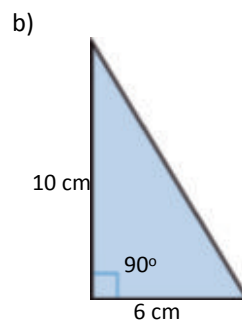
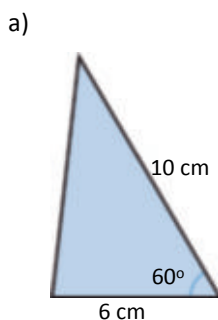


67. Copia estos elementos en tu cuaderno y construye un triángulo con ellos.



68. Los lados a y b de un triángulo $\widehat{ABC}$ miden 6 cm y 10 cm, respectivamente. Dibuja un triángulo en cada caso.

- a) El ángulo comprendido entre a y b mide 60° .
 b) El ángulo comprendido entre a y b mide 90° .
 c) El ángulo comprendido entre a y b mide 120° .



69. Completa en tu cuaderno la tabla, sabiendo que $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los ángulos de un triángulo.

$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$
35°	65°	80°
85°	75°	20°
15°	150°	15°
80°	60°	40°
20°	135°	25°

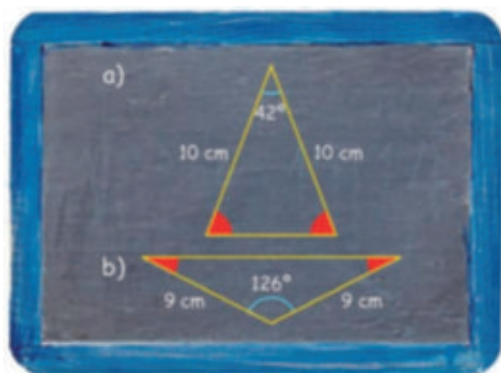
70. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 40°. ¿Cuánto miden sus otros dos ángulos?

Al ser rectángulo, uno de sus ángulos mide 90° y el otro $180 - (40 + 90) = 50^\circ$.

71. Un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ tiene su ángulo recto en $\hat{B}$.

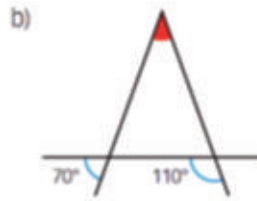
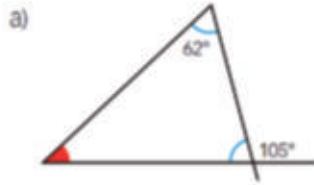
- ¿Cuánto mide $\hat{A}$ si $\hat{C} = 20^\circ$?
 - ¿Cuánto mide $\hat{C}$ si $\hat{A} = 35^\circ$?
 - ¿Cuánto miden $\hat{A}$ y $\hat{C}$ si es isósceles?
- $180 - (90 + 20) = 70^\circ$
 - $180 - (90 + 35) = 55^\circ$
 - $90 : 2 = 45^\circ$

72. Calcula cuánto miden los ángulos coloreados.



- Es un triángulo isósceles, con lo que esos dos ángulos son iguales: $(180 - 42) : 2 = 69^\circ$ mide cada ángulo.
- Es un triángulo isósceles, con lo que esos dos ángulos son iguales: $(180 - 126) : 2 = 27^\circ$ mide cada ángulo.

73. Calcula el valor del ángulo coloreado.



a) $180 - 105 = 75^\circ$ $180 - (75 + 62) = 43^\circ$

El ángulo coloreado mide 43° .

b) $180 - 110 = 70^\circ$ $180 - (70 + 70) = 40^\circ$

El ángulo coloreado mide 40° .

74. El ángulo exterior de este triángulo isósceles mide 168° . Calcula el valor de los tres ángulos del triángulo.



El triángulo es isósceles. Sus ángulos iguales miden $180^\circ - 168^\circ = 12^\circ$.

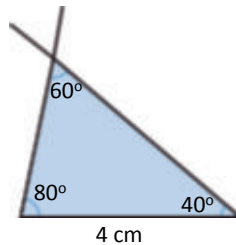
Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , el ángulo desigual mide $180^\circ - 2 \cdot 12 = 156^\circ$.

75. Construye un triángulo con estos elementos.

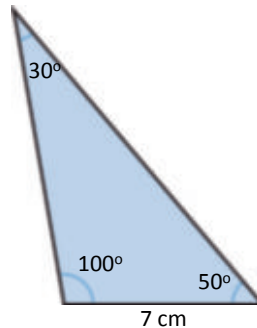
a) Uno de sus lados mide 4 cm, un ángulo contiguo a este lado 40° y un ángulo no contiguo 60° .

b) Uno de sus lados mide 7 cm, un ángulo contiguo a este lado 100° y un ángulo no contiguo 30° .

a) El otro ángulo contiguo al lado dado es $180 - (60 + 40) = 80^\circ$

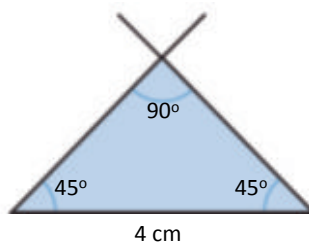


b) El otro ángulo contiguo al lado dado es $180 - (100 + 30) = 50^\circ$



78. Construye un triángulo rectángulo e isósceles cuyo lado mayor mida 4 cm. Explica cómo lo haces.

Como es rectángulo, uno de los ángulos (el opuesto a la hipotenusa que nos dan) mide 90° y como es isósceles, los otros dos ángulos miden igual: $(180 - 90) : 2 = 45^\circ$

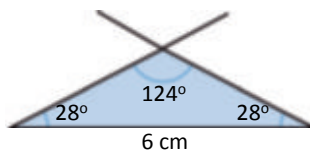


77. Dibuja estos triángulos.

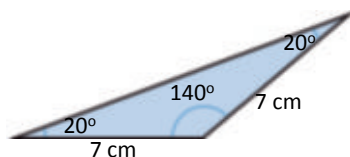
a) Un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual es $\hat{A} = 124^\circ$ y el lado desigual mide 6 cm.

b) Un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales miden 20° y sus lados iguales miden 7 cm.

a) Los otros dos ángulos miden $(180 - 124) : 2 = 28^\circ$.



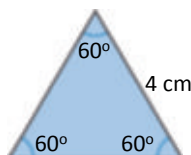
b) Su ángulo diferente miden $180 - (20 + 20) = 140^\circ$.



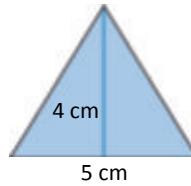
78. Construye un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 8 cm y tenga un ángulo de 50° .



79. Construye un triángulo equilátero cuyo lado sea de 4 cm.

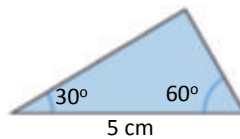


80. Construye un triángulo isósceles cuyo lado desigual mida 5 cm y la altura sobre él sea de 4 cm.



81. Construye un triángulo rectángulo cuyo lado mayor sea de 5 cm y uno de sus ángulos agudos sea el doble que el otro.

$$2x + x + 90 = 180 \rightarrow x = 30^\circ$$



82. Construimos un triángulo cuyos lados miden 5, 6 y 8 cm. A partir de este, queremos construir otro triángulo con los mismos ángulos pero cuyo lado menor sea de 3 cm.

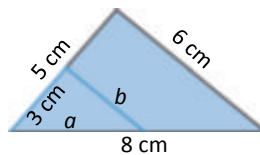
a) ¿Cómo lo harías?

b) ¿Cuánto valdrán los otros dos lados?

a) Primero trazamos un segmento de longitud 8 cm (base del triángulo). Con un compás, trazamos un círculo de radio 5 cm desde uno de los extremos del segmento, y otro de radio 6 cm desde el otro extremo.

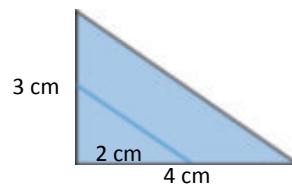
Formamos los otros dos lados del triángulo uniendo los extremos del segmento con uno de los puntos de intersección de los dos círculos.

b) $\frac{5}{3} = \frac{a}{8} = \frac{b}{6} \rightarrow a = 13,33 \text{ cm}; b = 10 \text{ cm}$



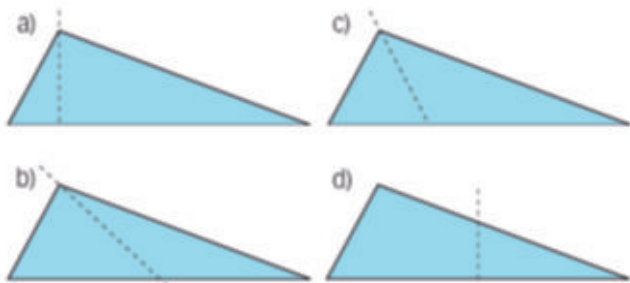
83. Construye un triángulo rectángulo cuyos lados menores midan 3 y 4 cm.

A la vista de este triángulo, ¿se te ocurre una manera rápida de construir un triángulo con un lado de 2 cm?



Se puede construir uniendo los puntos medios de los lados de 3 cm y 4 cm con el vértice del ángulo recto.

84. Escribe en tu cuaderno el nombre de las rectas notables dibujadas en los triángulos.



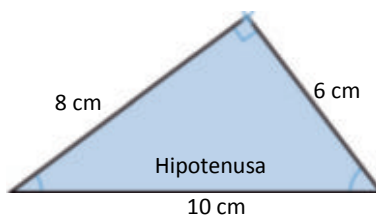
- a) Altura.
- b) Mediana.
- c) Bisectriz.
- d) Mediatriz.

85. Construye un triángulo de lados 6, 8 y 10 cm.

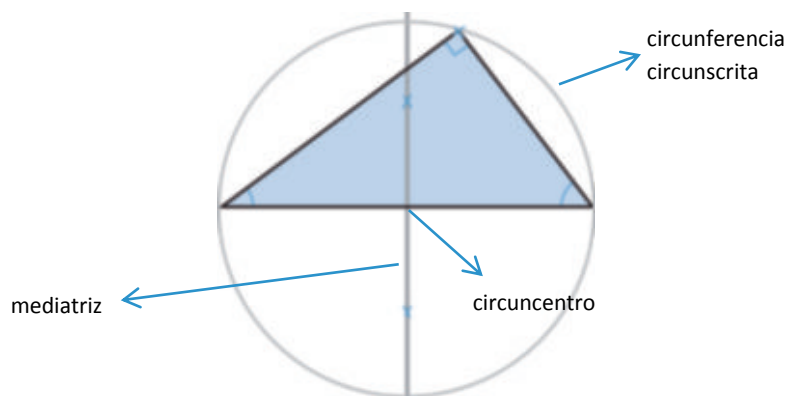
a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) Traza su circunferencia circunscrita.

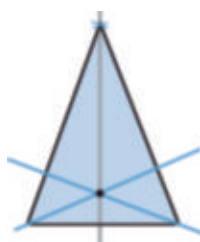
a) Es un triángulo rectángulo. Cumple el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow 100 = 36 + 64$.



b) Su circuncentro está en el punto medio de la hipotenusa.



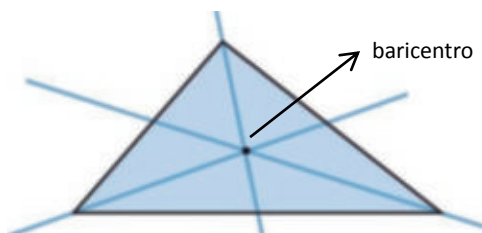
86. Construye un triángulo isósceles de lados 5, 8 y 8 cm. Dibuja sus alturas y señala el ortocentro.



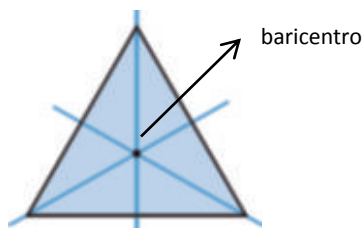
87. Construye un triángulo rectángulo de 3, 4 y 5 cm. Construye la circunferencia inscrita a dicho triángulo.



88. Construye un triángulo de lados 5, 6 y 8 cm y señala su baricentro.



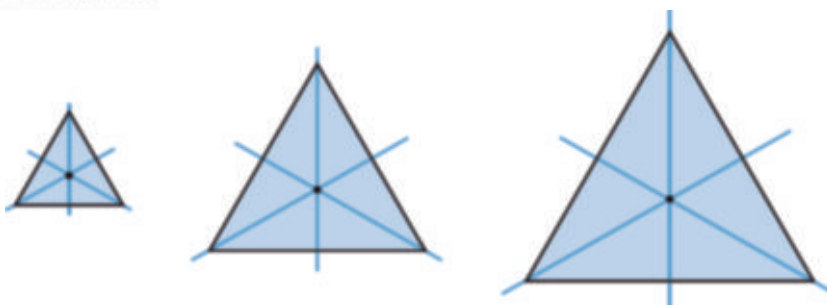
89. Construye un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Dibuja sus medianas y señala el baricentro. Mide la distancia entre el baricentro y cada uno de los vértices. ¿Cuánto vale?



La distancia del baricentro a cada uno de los vértices mide 4 cm

90. Construye tres triángulos equiláteros, uno cuyo lado mida 3 cm, otro con lado 6 cm y otro con lado 8 cm. Determina en cada caso sus puntos notables.

- a) ¿Qué observas?
b) ¿Cuáles de sus rectas coinciden?



- a) Todos los puntos notables (baricentro, ortocentro, incentro y circuncentro) coinciden.
b) Todas las rectas coinciden: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

DEBES SABER HACER

1. Di cuál de estos polígonos es regular.

- | | |
|-----------------------------|--|
| a) Un triángulo equilátero. | c) Un rectángulo. |
| b) Un cuadrado. | d) Un rombo. |
| a) Regular. | c) Irregular ya que tiene lados diferentes. |
| b) Regular. | d) Irregular, ya que tiene ángulos diferentes. |

2. Dibuja un polígono convexo de ocho lados y señala en él los ángulos interiores y las diagonales. ¿Cuántas diagonales puedes trazar?



$$\text{Número de diagonales} = 8 \cdot (8 - 3) : 2 = 20$$

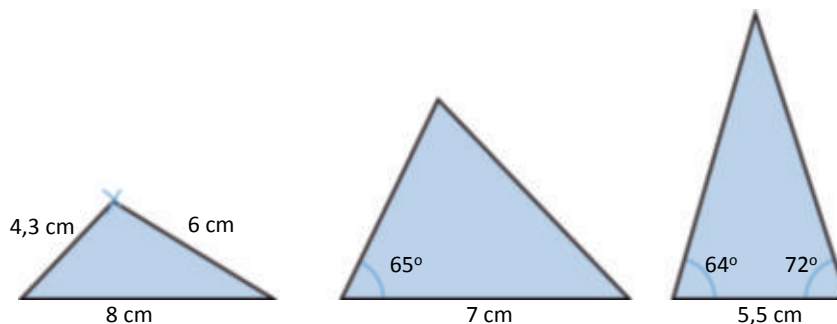
3. Halla el número de lados de un polígono cuya suma de todos sus ángulos vale:

- | | |
|---|-----------------|
| a) 540° | b) 1260° |
| a) $180 \cdot (n - 2) = 540 \rightarrow n = 5$ | |
| b) $180 \cdot (n - 2) = 1260 \rightarrow n = 7$ | |

4. Razona si es posible construir un triángulo con estas características:

- a) Sus lados miden 4,3; 6 y 8 cm.
 b) Dos de sus lados miden 5 y 7 cm y un ángulo es de 65° .
 c) Dos de sus ángulos miden 120° y 100° .
 d) Dos de sus ángulos miden 72° y 64° y uno de sus lados mide 5,5 cm.

- a) $8 < 6 + 4,3$ $6 < 8 + 4,3$ $4,3 < 8 + 6$ $8 > 6 - 4,3$ $6 > 8 - 4,3$ $4,3 > 8 - 6$
 Sí es posible.
 b) Sí es posible.
 c) No es posible porque los ángulos suman más de 180° .
 d) Sí es posible.



5. ¿Puede haber un triángulo isósceles y rectángulo a la vez?

Sí, la hipotenusa sería el lado desigual.

$$a^2 = 28^2 + 21^2 = 1\,225 \rightarrow a = \sqrt{1\,225} = 35 \text{ cm}$$

Debe cumplir el teorema de Pitágoras.

$$\text{Imaginemos que falta la hipotenusa: } a^2 = 15^2 + 12^2 = 369 \rightarrow a = \sqrt{369} = 19,21 \text{ cm.}$$

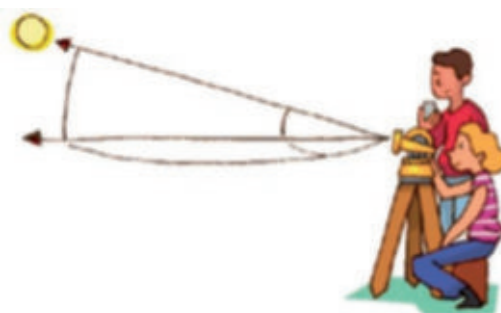
El lado que falta mide 19,21 cm.

$$\text{Si el lado que falta es un cateto: } b^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \rightarrow b = \sqrt{81} = 9 \text{ cm.}$$

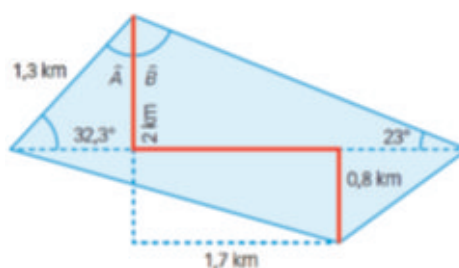
El lado que falta mide 9 cm.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

91. Muchas veces habrás visto construir edificios, carreteras u otras grandes obras. En estas obras habrás observado a personas mirando por una especie de prismáticos. La persona que realiza esto es un topógrafo y está usando un teodolito. El teodolito sirve para medir distancias y ángulos tanto horizontales como verticales.



A continuación puedes ver el plano de un estanque en el que se quiere construir una pasarela que lo atraviese (marcada con una línea roja).



El plano tiene solo algunas distancias y las medidas de algunos ángulos, y con ellos hay que calcular:

- La distancia que recorre la pasarela.
- Los ángulos A y B que forma la pasarela con los lados del estanque.

$$\text{a) La longitud de la pasarela es } 2 + 1,7 + 0,8 = 4,5 \text{ km}$$

$$\text{b) } \hat{A} = 180 - (90 + 32,3) = 57,7^\circ$$

$$\hat{B} = 180 - (90 + 23) = 67^\circ$$

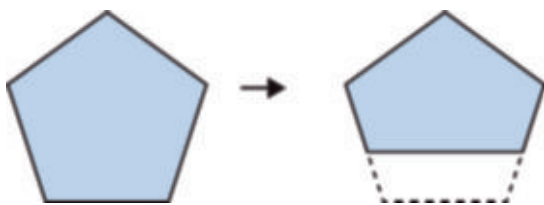
FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

92. ¿Puede haber un polígono de 3, 4, 5, 6... lados, con todos los ángulos iguales, pero que no tenga los lados iguales?

- a) Construye y dibuja los polígonos que cumplen esta condición.
b) Explica en qué casos no es posible y por qué.

En el caso del polígono de 3 lados no es posible, porque si tiene todos sus ángulos iguales, sus lados han de ser también iguales.

En el resto de polígonos sí es posible; basta con tomar una recta paralela a uno de los lados de un polígono regular y sustituirla por el lado correspondiente, alargando o acortando los adyacentes.



93. Construye un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 6 cm.



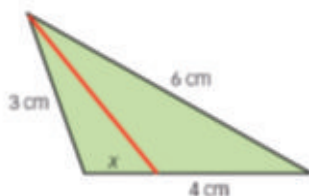
Construimos un segmento de 6 cm. Trazamos otro segmento de 6 cm perpendicular al anterior y que se corte en sus puntos medios.

Los extremos de los segmentos son los vértices del cuadrado.

94. Una de las propiedades de las bisectrices de un ángulo es la siguiente:

La bisectriz de un ángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados correspondientes.

A partir de esta propiedad, calcula el valor de x en el triángulo siguiente.



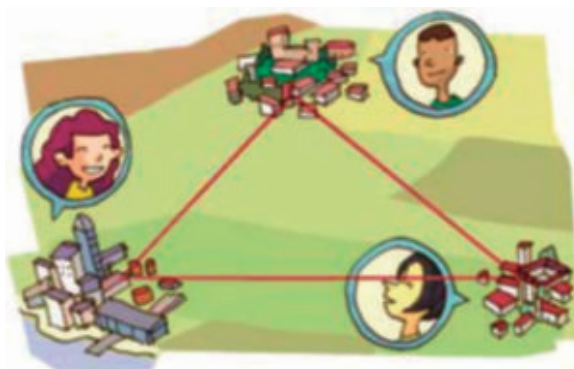
Teniendo en cuenta la proporcionalidad que se cumple:

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{4} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{6} \rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

PRUEBAS PISA

95. Marcos, Raúl y Andrea viven en tres pueblos diferentes que no están alineados sobre el mapa.

Han decidido que harán una excursión. Cada uno saldrá de su pueblo a la misma hora y se dirigirá, campo a través, hacia un punto que se encuentre a la misma distancia de los tres pueblos.



Han cogido un mapa y quieren determinar ese punto en el que se encontrarán, ¿cómo pueden calcular ese lugar?

Lo pueden calcular hallando el circuncentro del triángulo formado por los tres pueblos (vértices del triángulo).

96. Elige la figura que se ajusta a la siguiente descripción.

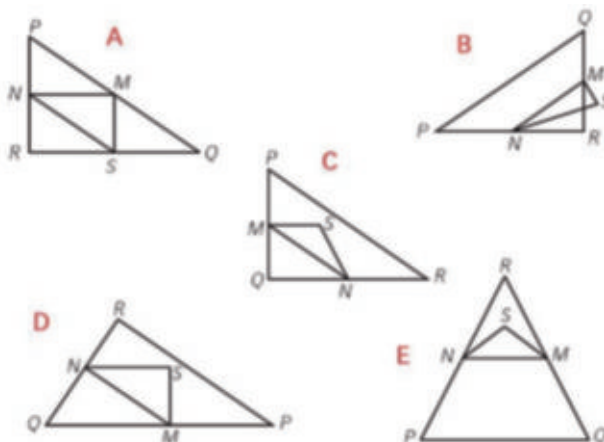
El triángulo PQR es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en R.

El lado RQ es menor que el lado PR.

M es el punto medio del lado PQ y N es el punto medio del lado QR.

S es un punto del interior del triángulo.

El segmento MN es mayor que el segmento MS.



La figura D.

