Geometría: Puntos, rectas, planos.

1.

Considera los puntos $A(2,-1,-2)$ y $B(-1,-1,2)$, y la recta r dada por $x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$

a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.
b) Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

2.

Halla cada uno de los puntos de la recta $r\equiv\begin{cases}x-y=0\\ y-z=0\end{cases}$ de manera que junto con los puntos $A(1,1,0), B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$ formen un tetraedro de volumen $\frac{5}{6}$

POSICIONES RELATIVA DE RECTAS (determinación de planos y rectas)

3.

La recta $r\equiv\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

4.

Considera las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=1\\ z=-3-\lambda\end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s.
b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

5.

Siendo $a\neq 0$, considera las rectas

$$r\equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s\equiv\frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) (1'25 puntos) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.
b) (1'25 puntos) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

6.

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Calcula, si es posible, el plano que contiene a r y s.

7.

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv x-2 = y-2 = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4+t \\ z = mt \end{cases}$$

a) Determina m para que r y s sean paralelas.

b) Halla, si existe, un valor de m para el que ambas rectas sean la misma.

c) Para $m=1$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s

8.

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2+m\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+2z=3 \\ x+z=2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s según los valores de m.

b) Para $m=1$, calcula el coseno del ángulo que forman las rectas r y s

9.

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) Halla k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

10. (Apartado b: perpendicular común a rectas, razonarlo detenidamente)

Considera las rectas r y s dadas por: $r \equiv \begin{cases} x+y = z+4 \\ x+2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s.

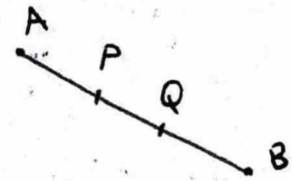
b) Calcula la recta perpendicular común a r y a s.

GEOMETRÍA

① $A(2,-1,-2)$ $\quad B(-1,-1,2)$ $\quad r \equiv x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

Clase

a) Puntos de $\overline{AB}$ que lo dividen en 3 iguales



$$\vec{AB} = (-1,-1,2)-(2,-1,-2) = (-3,0,4)$$

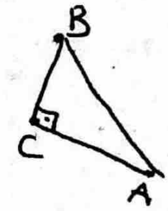
$$\boxed{\vec{OP}} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB} = (2,-1,-2) + \frac{1}{3}(-3,0,4)$$
$$= (2,-1,-2) + (-1,0,4/3) = \boxed{(1,-1,-2/3)}$$

$$\boxed{\vec{OQ}} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AB} = (2,-1,-2) + \frac{2}{3}(-3,0,4) = (2,-1,-2)+(-2,0,8/3)$$
$$= \boxed{(0,-1,2/3)}$$

b) C de r / triángulo ABC sea rectángulo en C.

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

Sea $C \in r$, $C(1+t, 1-t, 1+2t)$



$$\vec{CA} = (2,-1,-2)-(1+t, 1-t, 1+2t)$$
$$= (1-t, -2+t, -3-2t)$$

$$\vec{CB} = (-1,-1,2)-(1+t,1-t,1+2t) = (-2-t, -2+t, \cancel{2}\,1-2t)$$

$$\vec{CA} \perp \vec{CB} \Rightarrow \vec{CA}\cdot\vec{CB} = 0 \Rightarrow (1-t, -2+t, -3-2t)\cdot(-2-t, -2+t, 1-2t)$$
$$\Rightarrow (1-t)(-2-t) + (-2+t)\cdot(-2+t) + (-3-2t)\cdot(1-2t) = 0$$
$$-2-t+\cancel{2t}+\underline{t^2}+4-\cancel{2t}-2t+\underline{t^2}-3+6t-2t+\underline{4t^2} = 0$$
$$6t^2+t-1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(-1)\cdot 6}}{2\cdot 6} = \frac{-1\pm 5}{12} \begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$$

Si $t = \frac{1}{3}$ $\quad C = \left(1+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, 1+\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

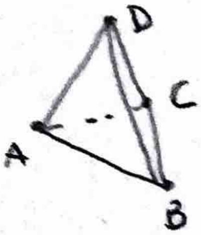
Si $t = -\frac{1}{2}$ $\quad C' = \left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, 1-\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

luego hay 2 puntos que lo cumplen.

② Halla cada uno de los puntos de $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

Ejer

que junto con $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$ formen tetraedro de volumen $\frac{5}{6}$.



$V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right| = \frac{5}{6}$ Siendo D punto genérico de r

$r \equiv \begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

$\vec{AB} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$

$\vec{AC} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$

$\vec{AD} = (t,t,t) - (1,1,0) = (t-1, t-1, t)$

$V = \frac{5}{6} \Rightarrow \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right| = 5$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ t-1 & t-1 & t \end{vmatrix} = -(t-1) - (t-1) - t = -3t+2$$

$|-3t+2| = 5 \Rightarrow \begin{cases} -3t+2 = 5 \Rightarrow t = -3/3 = -1 \\ -3t+2 = -5 \Rightarrow t = 7/3 \end{cases}$

Hay 2 soluciones: $D_1 = (7/3, 7/3, 7/3)$ y $D_2 = (-1,-1,-1)$

(3) $r \equiv \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ $\quad$ $s \equiv$ recta por $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$

Clase

r y s se cortan. ¿a? ¿punto de corte?

r: $\vec{u}\,(2,2,3)$
$A\,(-3,-4,3)$

s: $\vec{PQ} = (a,1,0) - (1,0,2) = (a-1,1,-2)$
$P\,(1,0,2)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + (a-1)t \\ y = 0 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Como r y s tienen un punto en común, alguno de s debe cumplir r, veamos cuál, sustituyendo x, y, z de s en r:

$$\frac{1+(a-1)t+3}{2} = \frac{t+4}{2} = \frac{2-2t-3}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{1}+(a-1)t+\cancel{3} = t+\cancel{4} \\ 3(t+4) = 2(-2t-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = (a-1)t - t \\ 3t+12 = -4t-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = at - 2t \\ 7t = -14 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = -2$ ~~a~~

$-2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2.$

Así, para $a=2$ las rectas tienen un punto en común, en concreto cuando $t=-2$ en s:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + (2-1)\cdot(-2) = -1 \\ y &= -2 \\ z &= 2 - 2(-2) = 6 \end{aligned}\right\} \quad \text{Punto } (-1,-2,6)$$

(4)

Clase

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Posición relativa r y s

$$r \equiv \begin{cases} P(3, 1, -3) \\ \vec{u}(1, 0, -1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 - y \\ y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$Q(1,0,0) \quad \vec{v}(-1,1,0)$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, tienen distinta dirección. ($\vec{u} \neq k\vec{v}$) luego rango $([\vec{u}, \vec{v}]) = 2$. Las rectas se cortan o se cruzan.

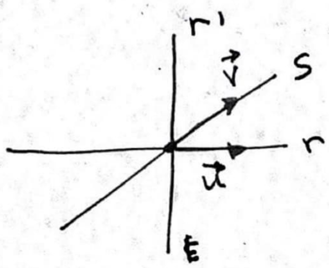
$\vec{PQ} = (-2, -1, 3)$

Hallamos el rango de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ})$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 1 - 2 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow \text{rango } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}) = 2$$

Luego r y s se cortan en un punto.

b)



r y s secantes

¿r' recta perpendicular a r y s que las corta?

1) Debe pasar por el punto común (vimos en a) que son secantes)
2) El vector dirección de r' debe ser perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (hacemos $\vec{u} \times \vec{v}$).

1) Punto común de r y s (en paramétricas): igualamos x, y, z de ambas

$$\left.\begin{aligned} 3 + \lambda &= 1 - t \\ 1 &= t \\ -3 - \lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow t = 1 \\ &\rightarrow \lambda = -3 \end{aligned} \qquad \text{Corte: } \begin{cases} x = 3 + \lambda = 3 - 3 = 0 \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda = 0 \end{cases}$$

Punto de corte: $(0, 1, 0)$

2) v' Vector dirección de r', que es $\perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$,
luego usamos $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{vector } (1,1,1) = v'$$

Luego r' pasa por el $(0,1,0)$ y su dirección es la de $v'(1,1,1)$:

$$r' \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

(5) $a \neq 0$ $\quad r \equiv x-1 = y-2 = \dfrac{z-1}{a} \qquad s \equiv \dfrac{x-3}{-a} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

a) Posición relativa de r y s según a.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,2,1) \\ \vec{u}(1,1,a) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} Q(3,3,-1) \\ \vec{v}(-a,-1,2) \end{cases}$$

Hallamos $\vec{PQ} = (2,1,-2)$ y estudiamos el rango de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}]$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{vmatrix} = \cancel{2} + 4 - a^2 + \cancel{2a} - \cancel{2} - \cancel{2a} = 4 - a^2$$

$4 - a^2 = 0 \iff a = 2$ ó $a = -2$

- Si $a \neq 2, -2$ el rango de $([\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}]) = 3$ y entonces r y s se cruzan
- Si $a = 2$, el rango será menor o igual que 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ el rango es 2.}$$

y $\vec{u}, \vec{v}$ no son paralelos, luego r y s se cortan

• Si $a=-2$, sucede parecido:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

luego rango $([\vec{u},\vec{v}]) = $ rango$([\vec{u},\vec{v},\vec{PQ}])=2$ y r y s se cortan.

b) Para $a=2$, halla ecuaciones recta perp. a r y s por el punto de corte de ambas.
(Como 4 b)

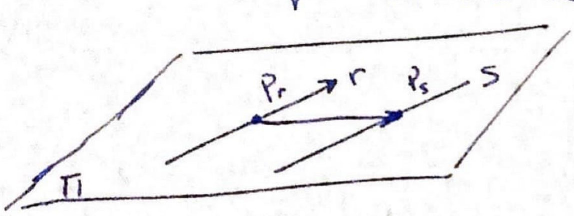
(6) $r \equiv \dfrac{x-2}{-2} = y-1 = \dfrac{z}{-2}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$

a) Posición relativa r y s

$$s \equiv \begin{cases} x=3-2y \\ z=2-2y \\ y=y \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-2t \\ y=t \\ z=2-2t \end{cases} \qquad \vec{d_s}(-2,1,-2) \quad P_s(3,0,2)$$

$\vec{d_r}(-2,1,-2)$ Observamos que r y s tienen la misma dirección. Como $P_r(2,1,0)$ no cumple s: $\begin{cases} 2+2\cdot 1 \neq 3 \\ 2\cdot 1+0=2 \end{cases}$ entonces r y s no tienen puntos en común, luego son paralelas

b) Plano que contiene a r y s.



Tomamos $P_r \in \pi$ y como direcciones, $\vec{d_r}(-2,1,-2)$ y $\vec{P_rP_s} =$
$= (3,0,2)-(2,1,0) = (1,-1,2)$ (no paralelos).

La ec. de π:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x-2 \\ 1 & -1 & y-1 \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2z + \cancel{2(x-2)} - 2(y-1) - \cancel{2(x-2)}$$
$$-z+4(y-1) = 2z-2y+2-z$$
$$+4y-4 = \boxed{2y+z-2=0}$$

⑦ $r \equiv x-2 = y-2 = z$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4+t \\ z = mt \end{cases}$ $\qquad P_s(4,4,0)$

a) m para que r y s paralelas.

$\vec{d_r}(1,1,1)$ $\quad \vec{d_s}(1,1,m)$ $\quad \vec{d_r} \parallel \vec{d_s} \iff m=1$

Veamos si ~~cualq~~ un punto de r está o no en s:

$P_r(2,2,0)$ $\quad \begin{cases} 2 = 4+t \\ 2 = 4+t \\ 0 = t \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} t=-2 \\ t=0 \end{matrix}$ $\quad$ no cumple.

Luego no tienen ningún punto en común, así que son paralelas si $m=1$.

b) m para que r y s coincidan.

Para que coincidan, deben tener la misma dirección. Eso sólo sucede para $m=1$ (por a), y en ese caso son paralelas. Luego no existe valor de m para que sean coincidentes.

c) Para $m=1$, plano que contiene a r y s.

Por a) r y s son paralelas. Tomamos $P_r(2,2,0)$ que está en el plano, y como direcciones de π:

$\vec{d_r}(1,1,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s} = (4,4,0)-(2,2,0) = (2,2,0)$

(no son paralelos)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ 1 & 2 & y-2 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cancel{2z} + 2(y-2) - 2(x-2) - \cancel{2z} = 0$$

$$2y - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{y-x=0}$$

⑧ $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + m\lambda \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Posición relativa de r y s según m.

$\vec{d_r}\ (1,1,m)$

$P_r\ (1,1,2)$

$s \equiv \begin{cases} x = 2 - z = 2 - t \\ y = x + 2z - 3 = 2 - t + 2t - 3 = t - 1 \\ z = t \end{cases}$

$\vec{d_s}\ (-1,1,1) \quad P_s(2,-1,0)$

Veamos el rango de $[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \vec{P_rP_s}]$ según m

$\vec{P_rP_s} = (2,-1,0) - (1,1,2) = (1,-2,-2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2m + 1 - m + \cancel{2} - \cancel{2} = m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1$, rango es 3, luego las rectas se cruzan

Si $m = 1$, el rango es 2 $\left[\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \right]$, luego r y s son secantes

b) $m = 1$, ¿ángulo r y s?

Por a), r y s son secantes. Su ángulo viene dado por el de r y s:

$\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = |\vec{d_r}| \cdot |\vec{d_s}| \cdot \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d_r} \cdot \vec{d_s}|}{|\vec{d_r}| \cdot |\vec{d_s}|} = \frac{|(1,1,1)\cdot(-1,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-1+1+1|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}^2} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \cancel{\arccos}\ \frac{1}{3}}$$

⑨ $A(-1,3,2)$ $B(2,-1,-1)$ y $C(a-2,7,b)$

a) a y b t.q. A, B, C alineados.

Eso sucede si $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son proporcionales, es decir, paralelos:

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (3,-4,-3)$ $\quad\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (a-1, 4, b-2)$

$$\frac{3}{a-1} = \frac{-4}{4} = \frac{-3}{b-2} \iff \begin{cases} \dfrac{3}{a-1} = -1 \Rightarrow 3 = -a+1 \Rightarrow a = -2 \\ \dfrac{-3}{b-2} = -1 \Rightarrow -3 = -b+2 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

b) $a=b=1$, halla recta por origen y es perp. al plano que contiene A, B, C.

Por a), para $a=b=1$, A, B y C no están alineados, luego determinan un plano, π. Si $r \perp \pi \Rightarrow \vec{d_r} = \vec{n_\pi}$

Entonces para determinar $\vec{n_\pi}$, hallamos $\vec{n_\pi} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= 16\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k} \qquad \vec{n_\pi}(16,3,12)$$

Recta con $\vec{d_r}(16,3,12)$ por $O(0,0,0)$:

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{3} = \frac{z}{12}$$

(10) Clase

$r \equiv \begin{cases} x+y=z+4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$

a) Posición relativa de r y s

$r: \begin{cases} y=t \\ x=7-2t \\ z=x+y-4=7-2t+t-4=-t+3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x=7-2t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$

$P(7,0,3)$ $\quad \vec{u}(-2,1,-1)$

$s: \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=\lambda \end{cases}$ $\quad Q(2,-3,0)$ $\quad \vec{v}(0,0,1)$

Como $\vec{u}(-2,1,-1)$ y $\vec{v}(0,0,1)$ no son proporcionales, puede que r y s sean secantes o se crucen.

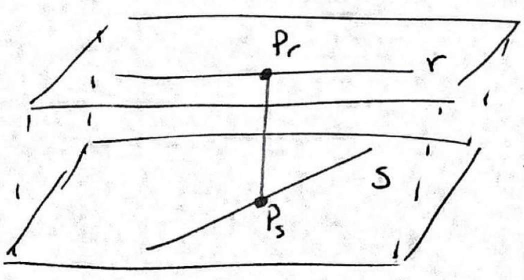
Veamos el rango de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}]$

$\vec{PQ}=(2,-3,0)-(7,0,3)=(-5,-3,-3)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -5-6=-11 \neq 0 \Rightarrow \text{rango es } 3,$$

luego r y s se cruzan

b) recta perpendicular a r y s.



Vamos a hallar los puntos P_r y P_s de cada recta por los que pasa la perpendicular a ambas, sabiendo que $\vec{P_rP_s} \perp \vec{u}$ y $\vec{P_rP_s} \perp \vec{v}$.

$P_r(7-2t, t, 3-t) \in r$ $\quad P_s(2, -3, \lambda) \in s$

$\vec{P_rP_s}(-5+2t, -3-t, \lambda-3+t)$

$\overrightarrow{P_rP_s} \perp \vec{u} \Rightarrow (-5+2t, -3-t, \lambda-3+t)\cdot(-2,1,-1)=0$

$\Rightarrow (-5+2t)\cdot(-2) - 3 - t - (\lambda-3+t) = 0$

$10-4t-\cancel{3}-t-\lambda+\cancel{3}-t=0 \Rightarrow 10-6t-\lambda=0 \quad (I)$

$\overrightarrow{P_rP_s} \perp \vec{v} \Rightarrow (-5+2t, -3-t, \lambda-3+t)\cdot(0,0,1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda-3+t=0 \Rightarrow \lambda = 3-t \quad (II)$

De (I) y (II) : $10-6t-3+t=0 \Rightarrow 7=5t \Rightarrow t=\frac{7}{5}$

$\lambda = 3-\frac{7}{5} = \frac{8}{5}$

Así $P_r\left(7-2\cdot\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, 3-\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

$P_s(2, -3, 8/5)$.

La recta pedida para por P_r, P_s y su vector puede ser $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(2-\frac{21}{5}, -3-\frac{7}{5}, 0\right) = \left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right)$

Tomando P_s :

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{11}{5}\mu \\ y = -3 - \frac{22}{5}\mu \\ z = 8/5 \end{cases}$$